MATEMATICKÝ ADVENTNÍ KALENDÁŘ 2024

1. úloha (neděle 1. 12.)

V Liché republice se používají k placení pouze mince dvou různých hodnot. **Určete, jakou nejvyšší částku jimi nelze zaplatit**, jestliže jsou mince hodnot:
(zadání pro NG) 3 a 7.
(zadání pro VG) 5 a 13.

Řešení: 11 (NG), 47 (VG)
Počet správných odpovědí: 41

Postup: (NG) Mincemi hodnoty 3 určitě zaplatíme libovolnou částku, která je násobkem čísla 3. Jednou mincí hodnoty 7 a příslušným počtem mincí hodnoty 3 zaplatíme od částky 7 každou další částku, která dává zbytek 1 po dělení 3 (částky 7, 10, 13, 16, …). Dvěma mincemi hodnoty 7 a příslušným počtem mincí hodnoty 3 zaplatíme od částky 14 každou další částku, která dává zbytek 2 po dělení 3 (částky 14, 17, 20, …). Nejvyšší částkou, kterou tedy nejsme schopni zaplatit, je 11 (neboť jde o nejvyšší číslo, které dává zbytek 2 po dělení 3 a je menší než 14).
Přehledně to ilustruje následující schéma:

$k \cdot 3$	3	6	9	12	15	…
$7 + k \cdot 3$	x	7	10	13	16	…
$2 \cdot 7 + k \cdot 3$	x	x	x	14	17	…

(VG) Analogická úvaha založená na tom, že násobky čísla 13 generují postupně různé zbytky po dělení 5, viz tabulka:

$k \cdot 5$	25	30	35	40	45	50	…
$2 \cdot 13 + k \cdot 5$	26	31	36	41	46	51	…
$4 \cdot 13 + k \cdot 5$	x	x	x	x	x	52	…
$13 + k \cdot 5$	28	33	38	43	48	53	…
$3 \cdot 13 + k \cdot 5$	x	x	39	44	49	54	…

2. úloha (pondělí 2. 12.)

Pro různé číslice B, G, I, Y platí vztah daný písemným sčítáním:

$$\begin{array}{cccc} B & I & G & Y \\ & B & I & G \\ & & B & I \\ & & & B \\ \hline 2 & 0 & 2 & 4 \end{array}$$

Určete hodnotu čtyřciferného čísla BIGY.

Řešení: 1823
Počet správných odpovědí: 43

Postup: Ze zadání okamžitě vidíme, že B nabývá hodnoty 1 nebo 2. Pokud by však B bylo 2, pak již součet čísel 2IGY + 2IG přesáhne požadovanou hodnotu 2024. Je tedy nutně B = 1 a platí:

$$\begin{array}{cccc} 1 & I & G & Y \\ & 1 & I & G \\ & & 1 & I \\ & & & 1 \\ \hline 2 & 0 & 2 & 4 \end{array}$$

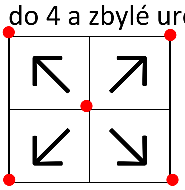
Nyní si stačí uvědomit, že součty číslic ve všech sloupcích kromě prvního budou minimálně 10 (nemohou být totiž rovny 0, 2 ani 4), proto budou přidávat do vedle stojícího levého sloupce vždy alespoň jednu 1. Platí tedy I = 8 (nemůže být 7, neboť součet ve třetím sloupci nemůže mít hodnotu 22). Doplněním do schématu již poté snadno dopočteme, že G = 2 (1 + 8 + G + 1 = 12) a Y = 3 (1 + 8 + 2 + Y = 14).
Úlohu lze řešit i úvahami v desítkovém zápisu čísel, platí totiž BIGY + BIG + BI + B = BBBB + III + GG + Y = 2024, z čehož jsme schopni snadno určit postupně hodnoty všech čísel, a tedy i jednotlivých číslic.

3. úloha (úterý 3. 12.)

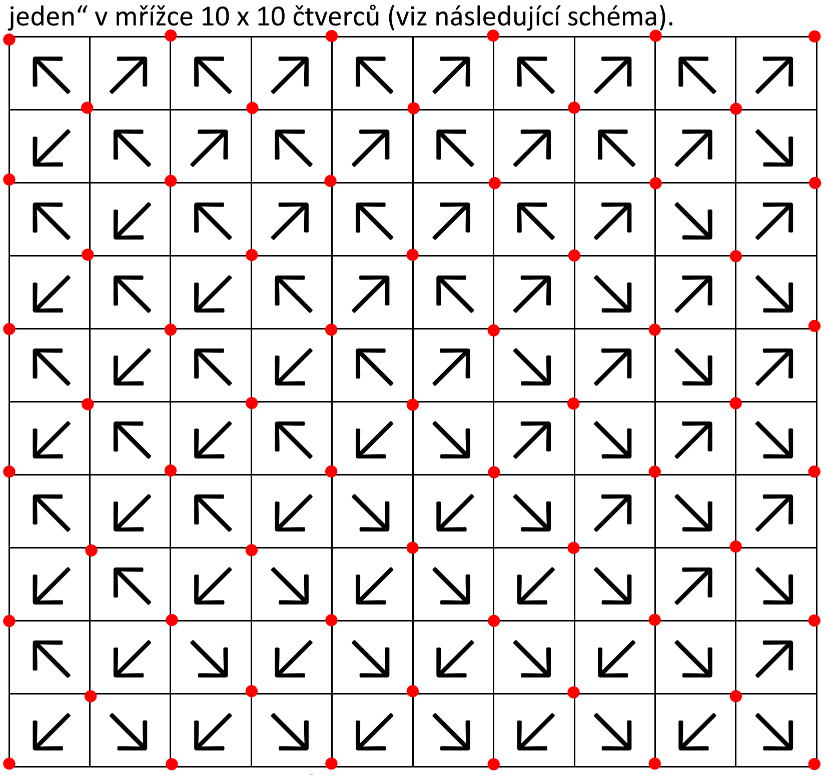
Blecha skáče úhlopříčně po mřížových bodech čtverečkové sítě, přičemž jedním skokem (↖, nebo ↗, nebo ↘, nebo ↙) se vždy dostane do jednoho ze 4 „úhlopříčně nejbližších“ bodů. **Určete, v kolika mřížových bodech může blecha skončit:**
(zadání pro NG) po nejvýše pěti skocích (nemusí tedy skočit vůbec, nebo může učinit 1 až 5 skoků).
(zadání pro VG) po právě pěti skocích.

Řešení: 61 (NG), 36 (VG)
Počet správných odpovědí: 30

Postup: Pro obě varianty zadání platí, že se blecha nikdy nemůže dostat do žádné dvojice mřížových bodů, které jsou spojeny stranou čtverce, tj. z okolních 8 mřížových bodů se vždy může dostat pouze do 4 a zbylé určitě nikdy nenavštíví (viz obrázek).

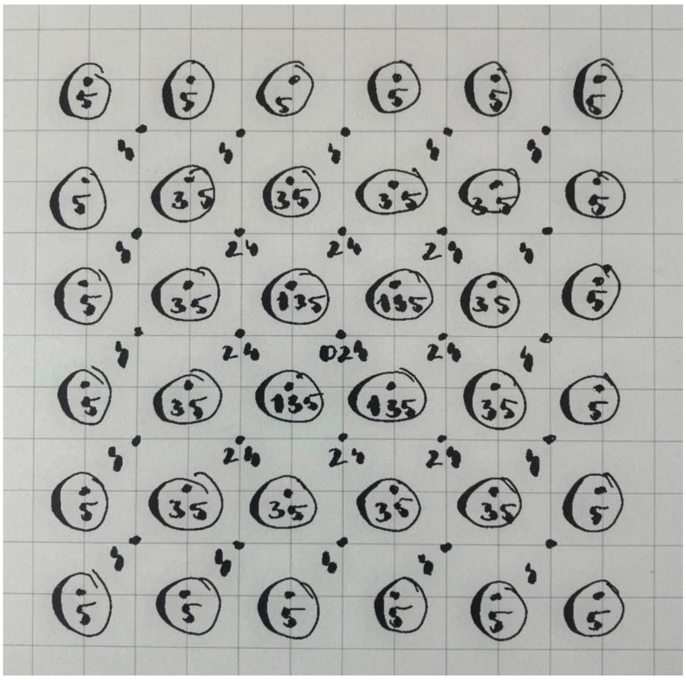


(NG) Po nejvýše 5 skocích se blecha může dostat do každého z mřížových bodů, které leží vždy „ob jeden“ v mřížce 10 x 10 čtverců (viz následující schéma).



Blecha se samozřejmě může pohybovat i směrem zpět, to nás však v této části zadání nemusí zajímat. Celkový počet mřížových bodů, kam se může dostat, je tedy roven 61 (lze např. získat jako součet bodů v řádcích 6 · 6 + 5 · 5, nebo jako součet bodů na obvodech čtverců 1 + 4 + 8 + 12 + 16 + 20).

(VG) Můžeme vycházet z řešení úlohy pro NG, přičemž si stačí uvědomit, že v některých mřížových bodech blecha po právě 5 skocích nemůže skončit. Přehledně to demonstruje následující schéma, v němž je u každého mřížového bodu vyznačeno, po kolika skocích v něm lze skončit:



Vidíme, že všechny body, u nichž je číslo 5, tvoří dohromady čtverec a je jich celkem 6 · 6 = 36.

4. úloha (středa 4. 12.)

Ač se to může zdát pro někoho překvapivé, existuje více než 20 přesmyček slova BIGY (např. GIYB) a dokonce více než 100 přesmyček slova GYMPL (např. PLYMG, MLPYG).
(zadání pro NG) Určete, která přesmyčka slova BIGY stojí na 19. místě, pokud je uspořádáme podle abecedy.
(zadání pro VG) Určete, která přesmyčka slova GYMPL stojí na 103. místě, pokud je uspořádáme podle abecedy.

Řešení: YBGI (NG), YLGMP (VG)
Počet správných odpovědí: 38

Postup: Úloha patří tematicky do oblasti matematiky zvané kombinatorika, my ji však nejprve vyřešíme bez příslušných kombinatorických znalostí.
(NG) Pokud si vypíšeme např. všechny přesmyčky začínající písmenem B, pak zjistíme, že jich existuje celkem 6 (BIGY, BIYG, BGIY, BGYI, BYGI, BYIG). Analogicky tedy bude existovat také 6 přesmyček začínající na každé ze zbylých písmen (z čehož mimo jiné vyplývá, že počet všech přesmyček je roven 4 · 6 = 24). Hledáme 19. přesmyčku, bude se tedy jednat o první přesmyčku v poslední, tj. čtvrté šestici přesmyček začínajících na poslední písmeno Y. Uspořádáme proto zbylá písmena podle abecedy, čímž obdržíme správné řešení YBGI.
(VG) Provedeme-li analogickou úvahu jako v zadání pro NG, pak zjistíme, že existuje vždy 24 přesmyček začínajících na dané písmeno (jedná se vlastně o počet všech přesmyček zbylých 4 písmen). Jelikož 4 · 24 = 96, budeme opět hledat v poslední, tj. páté skupině začínající na písmeno Y. Konkrétně se bude jednat o sedmou přesmyčku v této skupině (103 = 96 + 7). Rozdělíme-li přesmyčky ve skupině do šestic podle písmena, které následuje hned po Y, pak okamžitě vidíme, že jde o první přesmyčku ve druhé šestici (začínající vždy na druhé z písmen G, L, M, P, tj. L). Zbylá písmena jsou již nutně seřazena dle abecedy a dostáváme tak přesmyčku YLGMP.
Na závěr poznamenejme, že uvedené písmenné přesmyčky jsou typickým příkladem kombinatorických skupin, kterým říkáme permutace a jejich počet je vždy roven $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$,

jestliže se jedná o slovo s *n* různými (!) písmeny. V našem případě proto existuje celkem 4! = 24 přesmyček slova BIGY a 5! = 120 přesmyček slova GYMPL. S těmito znalostmi bychom mohli zrychlit naše úvahy o dělení do stejně početných skupin dle počátečního písmena, jinak by byl postup analogický.
Poznámka k zadání a řešení úlohy: Ze zadání jasně nevyplívá, zda samotná slova BIGY a GYMPL zahrnout do výčtu všech přesmyček. Proto byly uznány i odpovědi YBIG a YLGPM, které jsou sousedními přesmyčkami prezentovaného řešení (a odpovídají správnému řešení úlohy, v níž zadaná slova nepovažujeme za přesmyčky). Jasnější formulace z úvodu zadání by mohla být např. následující: Použitím všech písmen slova BIGY je možné vytvořit více než 20 přesmyček (např. BIGY, GIYB).

5. úloha (čtvrtek 5. 12.)

Vedení BIGY se rozhodlo přestrojit za Mikuláše, anděla a dva čerty. **Kdo zastával roli anděla**, jestliže platí následující tvrzení:

- Čerti neučí žádný stejný předmět.
- Součet počtů písmen v příjmeních čertů je prvočíslo.
- Mikuláš neučí matematiku.

Řešení: Jiří Vojáček
Počet správných odpovědí: 40

Postup: Jména a příjmení členů vedení BIGY jsou Jiří Vojáček (JV), Iva Štěrbová (IŠ), Ondřej Bouma (OB) a Petr Beneš (PB).
Dvě ze tří uvedených tvrzení se týkají čertů, pokusme se tedy nejprve určit, kdo bude převlečen za ně. Role čertů můžeme obsadit celkem 6 možnými způsoby (JV + IŠ, JV + OB, JV + PB, IŠ + OB, IŠ + PB, OB + PB). Z prvního tvrzení vyplývá, že čerty nemohou zastávat dvojice JV + PB (oba učí matematiku) ani IŠ + OB (oba učí němčinu). Zbývající čtyři dvojice mají postupně součet počtů písmen v jejich příjmeních 15 (JV + IŠ), 12 (JV + OB), 13 (IŠ + PB), 10 (OB + PB). Jediným prvočíslem z uvedených součtů je 13, proto se za čerty převlékli Iva Štěrbová a Petr Beneš.
Mikuláše a anděla tedy zastávali zbylí dva členové vedení a jelikož třetí tvrzení říká, že Mikuláš neučí matematiku, je jím Ondřej Bouma a roli anděla tedy vykonával Jiří Vojáček.

6. úloha (pátek 6. 12.)

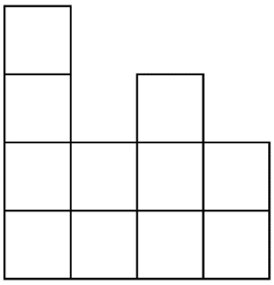
Určete počet všech trojciferných přirozených čísel takových, že jejich každé dvě sousední cifry se liší o 3.

Řešení: 20
Počet správných odpovědí: 25

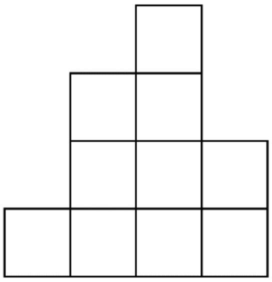
Postup: Úlohy můžeme řešit systematickým vypsáním všech čísel požadované vlastnosti. Pokud např. postupně zvyšujeme o 1 cifru na místě stovek, obdržíme čísla 141, 147, 252, 258, 303, 363, 369, 414, 474, 525, 585, 630, 636, 696, 741, 747, 852, 858, 963, 969. Z matematického pohledu je na úloze zajímavé, že počet čísel začínajících ciframi 3 a 6 je větší než počet čísel začínajících ostatními ciframi (proto např. nelze úlohu řešit úvahou, že pokud existují dvě čísla začínající cifrou 1, pak bude celkem 9 · 2 = 18 čísel). Tento fakt plyne z toho, že číslice 3 a 6 se liší právě o 3 a od obou lze dále 3 jak přičíst, tak odečíst, abychom dostali další cifru (jinými slovy posloupnost 0, 3, 6, 9 je nejdelší možná posloupnost cifer lišících se o 3).

7. úloha (sobota 7. 12.)

Pětiletý Karlík Gauss si hrál s dřevěnými kostkami, ze kterých skládal sloupce na podklad tvaru čtverce 4 x 4. Všiml si, že když se na svoji stavbu podívá postupně z jihu a západu, uvidí následující:



(pohled z jihu)



(pohled ze západu)

(zadání pro NG) Určete maximální možný počet kostek ve stavbě.
(zadání pro VG) Určete součet maximálního a minimálního možného počtu kostek ve stavbě (na některých polích nemusí být žádné sloupce).

Řešení: 33 (NG), 45 (VG)
Počet správných odpovědí: 21

Postup: Ke čtvercovému plánu připíšeme k řádkům a sloupcům čísla, která odpovídají výšce nejvyšší věže v daném řádku či sloupci (podle pohledů z jihu a západu). Obdržíme tím schéma:

1				
3				
4				
2				
	4	2	3	2

(NG) Chceme-li na stavbu použít co nejvíce kostek, snažíme se řádky a sloupce naplnit kostkami až do jejich maximální kapacity. Postupujeme přitom od řádků a sloupců s nejnižším číslem, tj. jako první obsadíme první řádek samými 1, dále řádek a sloupce s 2 atd. Pokud bychom totiž zaplnili např. nejprve první sloupec samými 4 (do jeho maximální možné kapacity), pak by jistě pohled ze západu obsahoval samé věže o výšce 4. Tabulku tedy vyplníme tak, aby v každém poli leželo menší z čísel, které mají u sebe daný řádek a sloupec.

1	1	1	1	1
3	3	2	3	2
4	4	2	3	2
2	2	2	2	2
	4	2	3	2

Maximální počet použitých kostek obdržíme jako součet všech čísel v tabulce, tj. 33.
(VG) Zjistíme ještě nejmenší možný počet použitých kostek. Řádky a sloupce budeme tedy plnit kostkami do jejich minimální kapacity. Ta je dána v nejlepším možném případě samými 0 a jedním číslem, které má u sebe daný řádek či sloupec. Abychom minimalizovali celkový počet použitých kostek, tak začneme od nejvyšších čísel a budeme je psát do polí, kde se potkají příslušný řádek a sloupec. Nejprve tedy do tabulky napíšeme jednu 4, kde se protnou řádek a sloupec se 4, dále 3 a 2 analogickým způsobem. Zbývá ještě obsadit první řádek jednou 1 a jeden ze sloupců jednou 2. To můžeme učinit více způsoby, jeden z nich ukazuje následující tabulka:

1	0	0	0	1
3	0	0	3	2
4	4	0	0	0
2	0	2	0	0
	4	2	3	2

Minimální počet použitých kostek je tedy 12 a součet minimálního a maximálního počtu se rovná 45.

8. úloha (neděle 8. 12.)

Sečteme-li v devíticiferném čísle všechny jeho číslice, dostaneme číslo 8.
Určete součin všech číslic v daném čísle.

Řešení: 0
Počet správných odpovědí: 39

Postup: Součet všech číslic v daném čísle je menší než jejich počet, proto číslo obsahuje alespoň jednu 0. Hledaný součin je tedy nutně 0.

9. úloha (pondělí 9. 12.)

Thalés a Pythagoras se v r. 555 př. n. l. utkali v běžeckém závodě na dráze tvaru rovnostranného trojúhelníku. 15letý Pythagoras běžel tehdy po celou dobu třikrát rychleji než 69letý Thalés.

Kolikrát se na trati po startu závodu potkali, jestliže vyběhli v opačném směru a Pythagoras stihl uběhnout celý obvod trojúhelníkové dráhy přesně 10krát?

Řešení: 13krát
Počet správných odpovědí: 25

Postup: Pokaždé, když Thalés uběhne jednu stranu trojúhelníku, stihne Pythagoras uběhnout celý jeho obvod, tj. určitě se potkají v každém z 10 „okruhů“, které Pythagoras celkem dokončí. Navíc ve chvíli, kdy Thalés uběhne celý obvod trojúhelníku, dokončí Pythagorás svůj třetí „okruh“ a potkají se tedy v prostoru startu. Toto se stane po každých třech Pythagorových uběhnutých „okruzích“, celkem tedy třikrát během celého závodu. Proto se na trati po startu potkají přesně 13krát.

10. úloha (úterý 10. 12.)

Žebřík má celkem 7 příček. **Určete, kolika různými způsoby se můžete dostat ze země na poslední příčku**, jestliže jedním krokem dokážete jít vždy na příčku následující, nebo jít přes jednu příčku. Nikdy se však nemůžete vracet dolů. (Nerozlišujeme přitom došlápnutí pravou či levou nohou.)

Řešení: 21
Počet správných odpovědí: 26

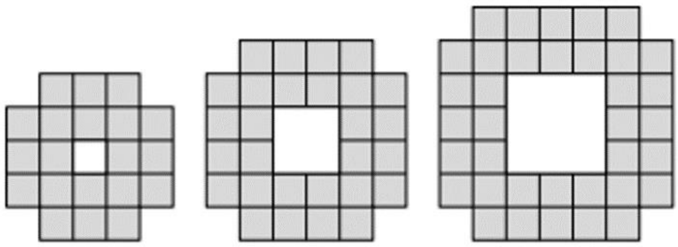
Postup: Zadání úlohy lze z matematického pohledu formulovat následovně: Kolika způsoby můžeme číslo 7 rozložit na součet, v němž se vyskytují pouze čísla 1 a 2, pokud budeme zároveň rozlišovat, v jakém pořadí jsou čísla v součtu zapsána? Úlohy lze tedy řešit postupným vypsáním všech možností rozkladu čísla 7 na součet jedniček a dvojek, a poté určením, kolika způsoby můžeme čísla v daném součtu uspořádat. Obdržíme:
7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 … 1 způsob
= 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 … 6 způsobů (jak umístit jednu 2)
= 2 + 2 + 1 + 1 + 1 … 10 způsobů (jak umístit dvě 2)
= 2 + 2 + 2 + 1 … 4 způsoby (jak umístit tři 2, resp. jednu 1)

Celkem tedy máme 1 + 6 + 10 + 4 = 21 způsobů, kterými se lze dostat ze země na poslední příčku žebříku. Poznamenejme, že podobnými úlohami, v nichž se určuje počet různých způsobů uspořádání nějakých prvků, se zabývá matematická disciplína zvaná kombinatorika. Kombinatorické úvahy však můžeme provádět mnohem dříve než v posledním ročníku studia, kdy se u nás na gymnáziu tato oblast probírá. Chceme-li např. zjistit, kolika způsoby lze uspořádat tři 1 a dvě 2, pak můžeme uvažovat jedním z následujících dvou způsobů:

- První z celkem 5 míst obsadím jednou 2 a druhou 2 budu postupně posunovat, čímž obdržím všechna uspořádání, v nichž stojí 2 na prvním místě. **Jsou celkem 4** (počet míst pro druhou 2). Dále již tedy umístím na první místo 1 a na druhé místo 2, přičemž druhou 2 budu opět posunovat na jedno ze zbývajících 3 míst, čímž obdržím **další 3** uspořádání. Nyní již tedy uvažujeme pouze uspořádání začínající dvěma 1. Je-li opět nejprve na třetím místě 2, pak druhou 2 mohu umístit buď na čtvrté, nebo páté místo, čímž získám **další 2** uspořádání. **Poslední** uspořádání již začíná třemi 1, za nimiž jsou již vynuceně dvě 2. Celkem tedy existuje **4 + 3 + 2 + 1 = 10** různých uspořádání.
- Můžeme se také ptát, kolik způsoby můžeme najít dvě místa pro umístění dvou 2 (zbylá tři místa pak již nutně připadnou 1). První místo lze vybrat 5 způsoby a ať už jej zvolíme jakkoliv, tak k němu máme 4 možnosti pro druhé místo, celkem je tedy zdánlivě 5 · 4 = 20 způsobů. Tento počet však ještě musíme vydělit dvěma, neboť pokud jsem např. nejprve vybral pro umístění jedné 2 čtvrté místo, a poté třetí, tak je to stejná možnost jako vybrat nejprve třetí, a poté čtvrté místo (11221 = 11221). Celkově tedy máme $\frac{5\cdot 4}{2} = 10$ různých uspořádání.

11. úloha (středa 11. 12.)

Kolik malých čtverečků potřebujeme, abychom vytvořili desátý člen posloupnosti, jejíž první tři členy vidíme na obrázku?



Řešení: 92
Počet správných odpovědí: 32

Postup: Čtverečky můžeme spočítat více různými způsoby, stačí si např. nakreslit obrazec, který odpovídá desátému členu, případně se zamyslet, kolik čtverečků budou mít postupně jeho jednotlivé řádky (a využít např. symetrie obrazce).
Ukažme si však matematický postup využívající posloupností. Nejprve se zamyslíme, jaké jsou počty čtverečků ve třech uvedených obrazcích (první tři členy posloupnosti), a poté odvodíme vzorec udávající počet čtverečků v libovolném takovém obrazci (a tedy i desátém členu posloupnosti). Budeme uvažovat tak, že vždy vezmeme počet malých čtverečků v celém velkém čtverci a odečteme čtverečky ve vnitřním menším čtverci a také 4 čtverečky v rozích. Počty čtverečků jsou postupně následující:

1. obrazec … $5^2 - 1^2 - 4 = 20$
2. obrazec … $6^2 - 2^2 - 4 = 28$
3. obrazec … $7^2 - 3^2 - 4 = 36$
…
n. obrazec … $(n+4)^2 - n^2 - 4 = n^2 + 8n + 16 - n^2 - 4 = 8n + 12$

A tedy speciálně 10. obrazec bude obsahovat $8 \cdot 10 + 12 = 92$ čtverečků.

Závěrem poznamenejme, že ke stejnému závěru jsme mohli dojít také pozorováním, že počet čtverečků sousedních obrazců (členů posloupnosti) se zvětšuje vždy o 8. Jedná se totiž o tzv. aritmetickou posloupnost, v níž je rozdíl libovolných dvou sousedních členů stále stejný (konstantní).

12. úloha (čtvrtek 12. 12.)

(zadání pro NG)
Určete, kolika nulami končí číslo $25! = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.
(zadání pro VG)
Určete, kolika nulami končí číslo $250! = 250 \cdot 249 \cdot 248 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.

(Symbol ! se čte jako „faktoriál", např. $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.)

Řešení: 6 (NG), 62 (VG)
Počet správných odpovědí: 21

Postup: Počet nul na konci libovolného čísla odpovídá počtu 10 v jeho rozkladu na součin. Přitom $10 = 2 \cdot 5$ a jelikož každé druhé číslo v rozepsaném součinu na pravé straně je sudé (dělitelné dvěma), stačí nám určit počet 5 v rozkladu, neboť 2 k nim bude výrazně více. Spočítáme tedy všechny násobky 5 mezi čísly na pravé straně, některé však započítáme vícekrát. Bude se jednat o násobky $25 = 5 \cdot 5$, které započítáme dvakrát (obsahují dvě pětky) a násobky $125 = 5 \cdot 5 \cdot 5$, které započítáme dokonce třikrát (obsahují tři pětky).
(NG) Násobky 5 v rozkladu na pravé straně jsou čísla: 5, 10, 15, 20, 25, přitom 25 obsahuje v rozkladu dvě pětky, proto ji započítáme dvakrát. Proto číslo 25! končí celkem 6 nulami.
(VG) Násobků 5 v rozkladu na pravém straně je celkem 250 : 5 = 50, každý pátý z nich (čísla 25, 50, 75 atd.) započítáme dvakrát, každý dvacátý pátý (čísla 125, 250) dokonce třikrát. Proto číslo 250! končí celkem 50 + 10 + 2 = 62 nulami.

13. úloha (pátek 13. 12.)

Na pátek třináctého si čtyři studenti BIGY domluvili termín opravného testu z matematiky, zapomněli však, do jaké učebny mají přijít. Každý z nich si naštěstí pamatoval jednu z následujících informací:

- Test se píše v jedné z kmenových učeben.
- Číslo učebny není dělitelné třemi ani čtyřmi.
- Číslo učebny obsahuje jak sudé, tak liché číslice.
- Součet číslic hledaného čísla učebny není roven osmi.

V jaké učebně se píše test?

Řešení: 205
Počet správných odpovědí: 31

Postup: Čísla kmenových učeben na BIGY jsou: 104, 107, 108, 112, 113, 115, 205, 207, 208, 212, 213, 216, 303, 304, 305, 306, 311, 312, 313, 314, 315. Pokud vyškrtneme všechna čísla, která jsou dělitelná třemi (tj. jejich ciferný součet je dělitelný třemi) a dále také ta, která jsou dělitelná čtyřmi (tj. jejich poslední dvoučíslí je dělitelné čtyřmi), zbydou nám čísla 107, 113, 115, 205, 305, 311, 313 a 314. Nyní vyřadíme ta čísla, která obsahují pouze liché číslice (pouze se sudými již v našem výčtu nejsou). Zůstanou nám tak pouze čtyři čísla: 107, 205, 305, 314. Všechna kromě 205 však mají ciferný součet osm, proto je hledaným číslem učebny právě 205.

14. úloha (sobota 14. 12.)

Pozorujeme bakterie, které se množí podle následujícího pravidla: Každá bakterie žije jednu hodinu a za každou půlhodinu vytvoří novou bakterii (tj. dvě bakterie za svůj život).
Jak velké bude žijící potomstvo jedné bakterie za pět a půl hodiny po jejím vzniku?

Řešení: 233 bakterií

Počet správných odpovědí: 8

Postup: Ukážeme, že vývoj počtu bakterií v půlhodinových intervalech tvoří členy Fibonacciho posloupnosti, tj. posloupnosti, v níž její libovolný člen získáme jako součet dvou předchozích členů. Vývoj počtu bakterií v čase vyjádříme pomocí následujícího schématu, v němž řádky tvoří půlhodinové intervaly, ve sloupcích jsou jednotlivé bakterie a číslo udává jejich stáří v půlhodinách.

```
0
1 0
2 1 0 0
  2 1 1 0 0 0
    2 2 1 1 1 0 0 0 0 0
        2 2 2 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0          atd.
```

Počet bakterií v daném čase je dán tedy počtem jedniček a nul, neboť bakterie staré jednu hodinu (2 půlhodiny) umírají. Všimněme si, že např. pátý řádek (udávající počet bakterií za dvě hodiny) vytvoříme jednoduše tak, že 0 a 1 z předchozího řádku zvětšíme o 1 a dále připočteme právě tolik 0, jako je počet těchto 0 a 1 z předchozího řádku. To ale znamená, že počet bakterií v této fázi vývoje je dán součtem počtu 0 (což je ale počet 0 a 1 neboli všech bakterií v předchozí fázi) a počtu 1, které jsme však obdrželi ze všech 0 v předchozí fázi (a tedy opět všech 0 a 1 neboli všech bakterií v předpředchozí fázi). Jinými slovy počet bakterií v dané fázi získáme pomocí součtu bakterií v dvou předchozích fázích, čímž obdržíme Fibonacciho posloupnost: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233 atd. Jelikož první člen 1 udává počáteční stav (po 0 hodinách), dvanáctý člen 233 bude udávat stav po pěti a půl hodinách (11 půlhodinách).

15. úloha (neděle 15. 12.)

Kolik existuje různých (neshodných) **rovnoramenných trojúhelníků**, které nejsou rovnostranné a jejich délky stran jsou jednociferná přirozená čísla?

Řešení: 52
Počet správných odpovědí: 14

Postup: V každém trojúhelníku musí platit trojúhelníková nerovnost, tj. součet délek libovolných dvou stran musí být větší než délka třetí strany. Proto např. neexistuje rovnoramenný trojúhelník s délkami ramen 1 tak, aby splňoval požadované zadání. Rovnoramenné trojúhelníky s délkou ramen 2 již existují, a to konkrétně dva (délky stran 2, 2, 1 a 2, 2, 3). Analogicky pro další délky ramen dostáváme postupně čtyři trojúhelníky s délkou ramen 3 (3, 3, 1 / 3, 3, 2 / 3, 3, 4 / 3, 3, 5), šest trojúhelníků s délkou ramen 4 (4, 4, 1 / 4, 4, 2 / 4, 4, 3 / 4, 4, 5 / 4, 4, 6 / 4, 4, 7), osm trojúhelníků s délkou ramen 5 (5, 5, 1 / 5, 5, 2 / 5, 5, 3 / 5, 5, 4 / 5, 5, 6 / 5, 5, 7 / 5, 5, 8 / 5, 5, 9), a dále také vždy osm trojúhelníků s délkami ramen 6, 7, 8 a 9 (zbylá strana již může mít libovolnou délku kromě délky ramene, aby nebyl rovnostranný). Celkem tedy existuje 2 + 4 + 6 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 52 trojúhelníků požadované vlastnosti.

16. úloha (pondělí 16. 12.)

Albert napsal řadu po sobě jdoucích čísel, která začínala číslem 1. Všechna čísla pak sečetl na kalkulačce a získal číslo 857. Omylem však do kalkulačky zadal jedno z čísel dvakrát. **Které to bylo?**

Řešení: 37
Počet správných odpovědí: 26

Postup: Můžeme postupně sčítat na kalkulačce čísla od 1 dále, až se dostaneme „poblíž“ chybného součtu v zadání 857. Konkrétně 1 + 2 + 3 + … + 39 + 40 = 820 a po přičtení čísla 37, které bylo započítáno dvakrát, obdržíme skutečně 1 + 2 + 3 + … + 39 + 40 + 37 = 857.

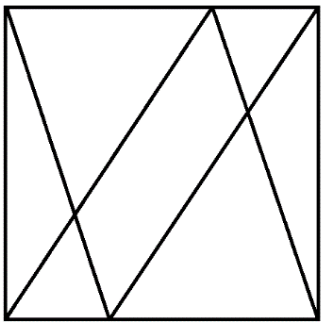
Ukažme si ještě, jak bychom mohli odhadnout počet čísel v součtu a určit jeho přesnou hodnotu (abychom nemuseli všechna čísla zadávat do kalkulačky např. v případě výrazně většího chybného součtu v zadání úlohy). Všimněme si, že čísla v součtu 1 + 2 + 3 + … + (n – 2) + (n – 1) + n můžeme rozdělit do dvojic, které dávají vždy stejný součet. Platí totiž 1 + n = 2 + (n – 1) = 3 + (n – 2) atd. Počet těchto dvojic je přitom roven polovině počtu všech čísel neboli $\frac{n}{2}$. Proto platí:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n = \frac{n}{2} \cdot (1+n)$$

Vynásobíme-li obě strany rovnosti dvěma, pak dostáváme poznatek, že dvojnásobek součtu všech čísel je roven součinu $n \cdot (n+1)$, tj. je „o něco“ větší než druhá mocnina počtu čísel n. Aplikujeme-li uvedené poznatky na naši úlohu, pak $2 \cdot 857 = 1714$. Přitom $40^2 = 1600$, čísel proto bude kolem 40 (ve skutečnosti je jich přesně 40 + jedno navíc započítané dvakrát). Náš výpočet na kalkulačce můžeme tedy zrychlit užitím uvedeného pravidla $1 + 2 + 3 + \cdots + 38 + 39 + 40 = 20 \cdot 41 = 820$.
Na závěr poznamenejme, že uvedené poznatky o součtu prvních n přirozených čísel prováděl slavný matematik Karl Friedrich Gauss (1777-1855) již ve svém raném dětství, když hned po nástupu na základní školu určil správně hodnotu součtu $1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100 = 50 \cdot 101 = 5050$.

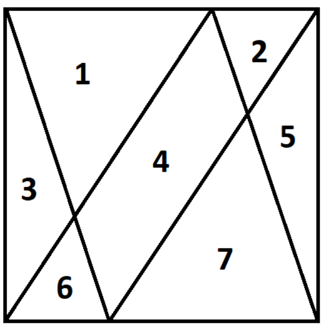
17. úloha (úterý 17. 12.)

Ve čtverci jsou vytvořeny dva shodné trojúhelníky tak, že jedna jejich strana je stranou čtverce a zbývající vrchol leží ve třetině protilehlé strany. **Kolik můžeme v takto vzniklém obrazci najít trojúhelníků** (tak, aby všechny jejich strany tvořily některé z vyznačených čar)?



Řešení: 12
Počet správných odpovědí: 28

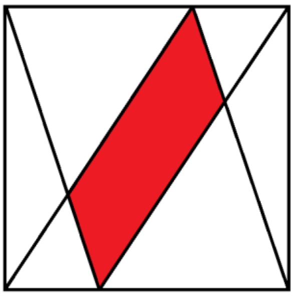
Postup: Nejprve si pro větší názornost označíme jednotlivé oblasti čtverce ze zadání čísly.



Vidíme, že již oblasti 1, 2, 3, 5, 6 a 7 jsou trojúhelníkového tvaru. Další trojúhelníky vzniknou spojením dvou oblastí, konkrétně 1 + 3, 2 + 5, 3 + 6 a 5 + 7. Poslední dvě oblasti získáme spojením tří oblastí 1 + 2 + 4, 4 + 6 + 7. Spojením více oblastí již žádný trojúhelník nezískáme, celkem tedy můžeme v obrazci najít 6 + 4 + 2 = 12 trojúhelníků.

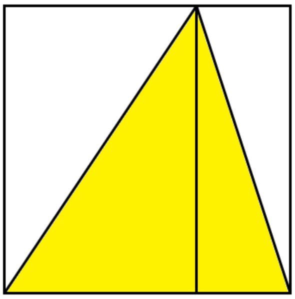
18. úloha (středa 18. 12.)

Ve čtverci o délce strany 12 jsou vytvořeny dva shodné trojúhelníky tak, že jedna jejich strana je stranou čtverce a zbývající vrchol leží ve třetině protilehlé strany (dělí ji tedy v poměru 1 : 2). **Určete obsah červeného útvaru, který je průnikem obou trojúhelníků** (viz obrázek).
(nápověda: Obsah vyjde celočíselně.)

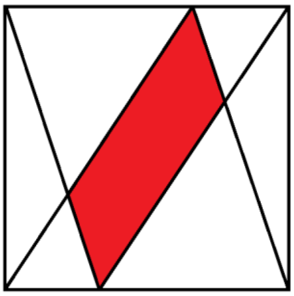


Řešení: 32
Počet správných odpovědí: 20

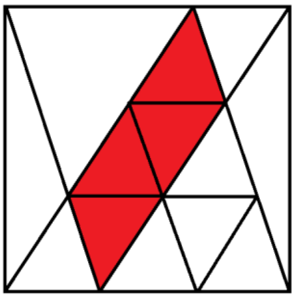
Postup: Obsah celého čtverce je $12^2 = 144$. Trojúhelník ze zadání úlohy tvoří jeho polovinu, což snadno zdůvodníme následujícím obrázkem (z něhož také plyne známý vzorec pro obsah trojúhelníku $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$). Proto je obsah trojúhelníku roven $\frac{1}{2} \cdot 144 = 72$.



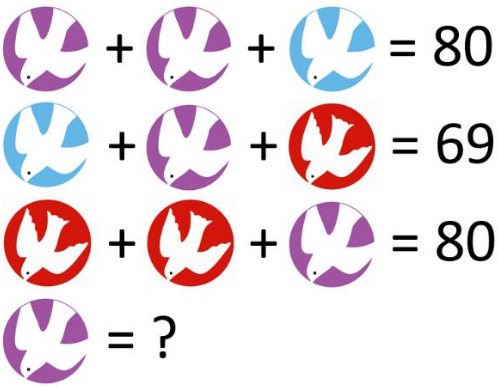
Zaměříme-li se nyní na obrázek ze zadání úlohy, tak vidíme, že trojúhelník je rozdělen na tři části, z nichž jednu tvoří kosodélník, jehož obsah máme určit.



Zbylé dvě části jsou však trojúhelníky, které jsou navíc podobné s původním trojúhelníkem, neboť vždy dvě jejich strany leží na stranách velkého trojúhelníku a jejich třetí strana je rovnoběžná se zbývající stranou velkého trojúhelníku (věta *uu*). Proto platí, že nejmenší trojúhelník vlevo má třetinové rozměry, a tím pádem devítinový obsah oproti původnímu trojúhelníku ($S_1 = \frac{\frac{1}{3}a \cdot \frac{1}{3}v_a}{2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{a \cdot v_a}{2}$). Analogicky trojúhelník vpravo má dvoutřetinové rozměry, a tím pádem čtyřdevítinový obsah, neboť $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$. Dohromady tak oba menší trojúhelníky tvoří $\frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ velkého trojúhelníku a na kosodélník připadnou zbývající $\frac{4}{9}$ obsahu, proto pro něj platí $\frac{4}{9} \cdot 72 = 32$.
Poznamenejme ještě, že z uvedených úvah vyplývá, že trojúhelník ze zadání úlohy lze rozdělit na devět shodných trojúhelníků následujícím způsobem:



19. úloha (čtvrtek 19. 12.)



Řešení: 34
Počet správných odpovědí: 45

Postup: Označíme-li jednotlivá loga písmeny podle jejich barev, pak obdržíme soustavu tří rovnic o třech neznámých:

$$\begin{aligned} 2f + m &= 80 \\ m + f + c &= 69 \\ 2c + f &= 80 \end{aligned}$$

Tu můžeme vyřešit různými způsoby, např. vyjádřením libovolné neznámé z jedné rovnice a dosazením do zbylých dvou (čímž obdržíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých). Můžeme si také všimnout, že pravé strany 1. a 2. rovnice, resp. 2. a 3. rovnice se liší vždy o 11, zatímco na levých stranách je místo *c* ve 2. rovnici *f* v 1. rovnici, resp. místo *m* ve 2. rovnici *c* ve třetí rovnici:

$$\begin{aligned} m + f + f &= 80 \\ m + f + c &= 69 \\ c + f + c &= 80 \end{aligned}$$

Plyne z toho, že $f = c + 11$ a analogicky $c = m + 11$. Čísla $m < c < f$ se tedy liší postupně vždy o 11 a např. z druhé rovnice snadno obdržíme:

$$\begin{aligned} c - 11 + c + 11 + c &= 69 \\ 3c &= 69 \qquad / : 3 \\ c &= 23 \end{aligned}$$

Proto $m = 12$, $c = 23$ a $f = 34$, což je hodnota, kterou jsme chtěli zjistit.

20. úloha (pátek 20. 12.)

Je dána čtvercová tabulka 3x3. Obarvěte jednotlivá políčka tabulky tak, aby v každém sloupci, v každém řádku i v každé úhlopříčce byla všechna tři políčka obarvená různými barvami.
Jaký nejmenší počet barev stačí ke splnění tohoto úkolu?

?	?	?
?	?	?
?	?	?

Řešení: 5
Počet správných odpovědí: 21

Postup: Pro jednoduchost označíme různé barvy postupně různými čísly 1, 2, 3 atd. a budeme se ptát, jaký nejmenší počet čísel potřebujeme, aby v každém řádku, sloupci i úhlopříčce ležela různá čísla. Nejprve ukážeme, že tabulka splňující zadání existuje již pro čísla 1 až 5, jedno z možných vyplnění je následující:

2	3	4
4	1	2
3	4	5

Zbývá ukázat, že menším počtem různých čísel tabulku vyplnit nelze. Vyplníme-li nejprve prostřední pole, pak si můžeme všimnout, že dané číslo 1 již nelze použít na žádném z dalších polí (neboť by se v některém řádku, sloupci či úhlopříčce vyskytovaly dvě 1). Pokud nyní vyplníme první řádek různými čísly, obdržíme:

2	3	4
	1	

Nyní potřebujeme doplnit čísla do dolních rohů tabulky tak, aby v úhlopříčkách byla různá čísla. Jak v levém, tak pravém rohu by však musela být nutně 3 (neboť čísla 1, 2 a 4 leží buď ve stejné úhlopříčce, nebo krajním sloupci. To ale není možné, neboť by pak byly dvě 3 v posledním řádku. Musíme proto použít další číslo 5, díky čemuž již tabulku vyplnit lze, jak jsme si ukázali výše.

2	3	4
	1	
3		5

21. úloha (sobota 21. 12.)

(zadání pro VG) Určete počet všech kladných přirozených dělitelů čísla 2024.
(zadání pro NG) Určete počet všech kladných přirozených dělitelů čísla 168.

Řešení: 16 (NG i VG)
Počet správných odpovědí: 24

Postup: V obou variantách zadání vyjde shodně 16 kladných přirozených dělitelů, neboť prvočíselné rozklady zadaných čísel jsou $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ a $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$. Libovolný dělitel je tedy tvaru $2^k \cdot 11^l \cdot 23^m$, resp. $2^k \cdot 3^l \cdot 7^m$, kde $k \in \{0, 1, 2, 3\}, l, m \in \{0, 1\}$. Proto existuje celkem $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ různých dělitelů (součin počtu možných exponentů). Na závěr poznamenejme, že mezi přirozené dělitele patří vždy i číslo $1 = 2^0 \cdot 11^0 \cdot 23^0 = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 7^0$, na které se často ve výčtu všech dělitelů zapomíná (spolu se zadaným číslem tvoří tzv. triviální dělitele).

22. úloha (neděle 22. 12.)

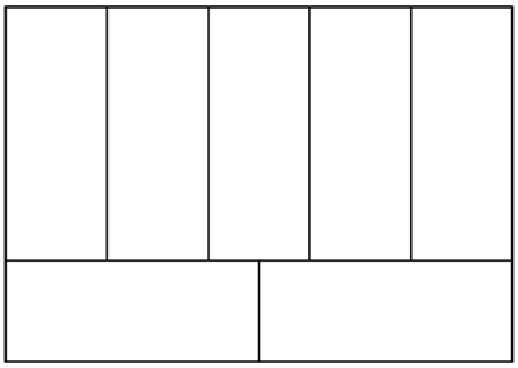
Objevte skryté číslo:
C.ADAEIBFECEHIGICBCHDF…

Řešení: π
Počet správných odpovědí: 21

Postup: Zaměníme-li všechna písmena jejich pořadím v abecedě (bez diakritiky), pak obdržíme prvních 20 číslic desetinného rozvoje čísla $\pi \doteq 3{,}14159265358979323846 \dots$

23. úloha (pondělí 23. 12.)

Obdélník o obvodu 136 cm je rozdělen na sedm shodných menších obdélníků jako na obrázku.



Jaký je obsah tohoto (velkého) obdélníku v cm²?

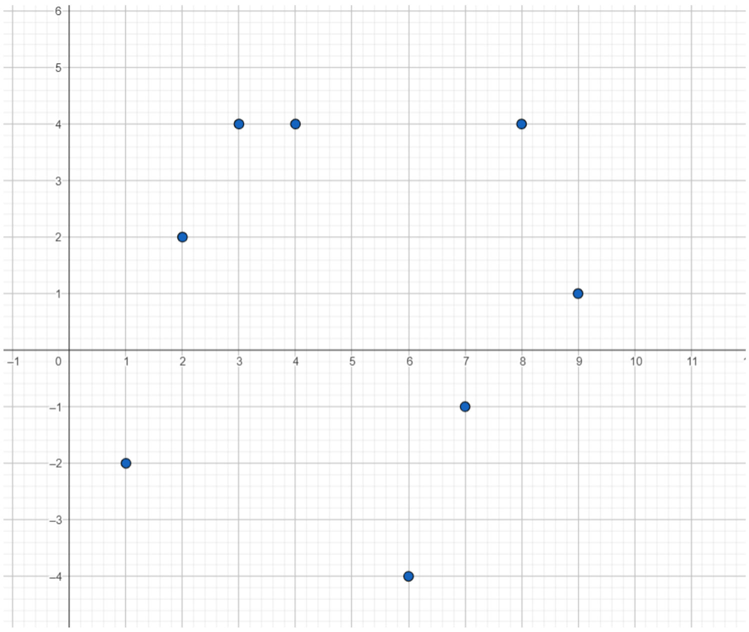
Řešení: 1120
Počet správných odpovědí: 23

Postup: Horní a spodní strana velkého obdélníku mají stejnou délku, proto jsou rozměry menšího obdélníku v poměru 2 : 5. Označíme-li je $2x$ a $5x$, pak má obvod velkého obdélníku délku $(5 \cdot 2x) + (5x + 2x) + 2 \cdot 5x + (5x + 2x) = 2 \cdot (10x + 7x) = 2 \cdot 17x = 34x$. Platí tedy $34x = 136$, neboli $x = 4$. Obsah velkého obdélníku je tedy roven $10x \cdot 7x = 10 \cdot 7 \cdot 4^2 = 1120$ cm².

24. úloha (úterý 24. 12.)

Děkujeme všem za účast v MAK a přejeme krásné vánoční svátky!
Věříme, že jsme si to společně užili. Proč?
Přece protože jsme _ _ _ _ _ _ _ _ !

BOXER, AXIOM, EXMANŽEL, LUXUSNÍ
BORAX, PIXEL, XEROGRAFIE, XYLÉM



Řešení: BOŽÍ BIGY
Počet správných odpovědí: 22

Postup: Nejprve si všimněme, že každé z uvedených osmi slov obsahuje právě jedno písmeno X. Význam souřadnic jednotlivých bodů je následující: první souřadnice (na vodorovné ose) udává pořadí slova, druhá (na svislé ose) posun hledaného písmene od písmene X v daném slově. Proto je např. prvním hledaným písmenem písmeno B, které stojí ve slově BOXER o dvě písmena vlevo od písmene X.