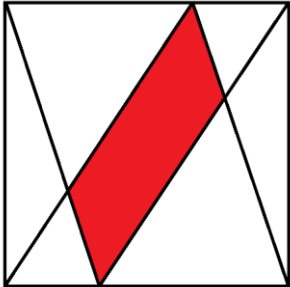


18. úloha (středa 18. 12. 2024)

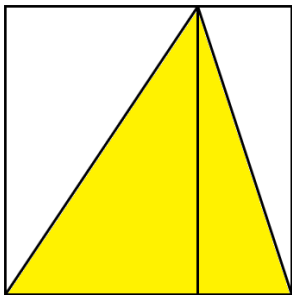
Ve čtverci o délce strany 12 jsou vytvořeny dva shodné trojúhelníky tak, že jedna jejich strana je stranou čtverce a zbývající vrchol leží ve třetině protilehlé strany (dělí ji tedy v poměru 1 : 2). **Určete obsah červeného útvaru, který je průnikem obou trojúhelníků** (viz obrázek). (nápopěda: Obsah vyjde celočíselně.)



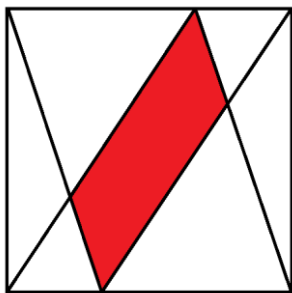
Řešení: 32

Počet správných odpovědí: 20

Postup: Obsah celého čtverce je $12^2 = 144$. Trojúhelník ze zadání úlohy tvoří jeho polovinu, což snadno zdůvodníme následujícím obrázkem (z něhož také plyne známý vzorec pro obsah trojúhelníku $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$). Proto je obsah trojúhelníku roven $\frac{1}{2} \cdot 144 = 72$.



Zaměříme-li se nyní na obrázek ze zadání úlohy, tak vidíme, že trojúhelník je rozdělen na tři části, z nichž jednu tvoří kosodélník, jehož obsah máme určit.



Zbylé dvě části jsou však trojúhelníky, které jsou navíc podobné s původním trojúhelníkem, neboť vždy dvě jejich strany leží na stranách velkého trojúhelníku a jejich třetí strana je rovnoběžná se zbývající stranou velkého trojúhelníku (věta *uu*). Proto platí, že nejmenší trojúhelník vlevo má třetinové rozměry, a tím pádem devítinový obsah oproti původnímu trojúhelníku ($S_1 = \frac{\frac{1}{3}a \cdot \frac{1}{3}v_a}{2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{a \cdot v_a}{2}$). Analogicky trojúhelník vpravo má dvoutřetinové rozměry, a tím pádem čtyřdevítinový obsah, neboť $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$. Dohromady tak oba menší trojúhelníky tvoří $\frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ velkého trojúhelníku a na kosodélník připadnou zbývající $\frac{4}{9}$ obsahu, proto pro něj platí $\frac{4}{9} \cdot 72 = 32$.

Poznamenejme ještě, že z uvedených úvah vyplývá, že trojúhelník ze zadání úlohy lze rozdělit na devět shodných trojúhelníků následujícím způsobem:

