16. úloha (pondělí 16. 12. 2024)

Albert napsal řadu po sobě jdoucích čísel, která začínala číslem 1. Všechna čísla pak sečetl na kalkulačce a získal číslo 857. Omylem však do kalkulačky zadal jedno z čísel dvakrát. **Které to bylo?**

Řešení: 37
Počet správných odpovědí: 26

Postup: Můžeme postupně sčítat na kalkulačce čísla od 1 dále, až se dostaneme „poblíž" chybného součtu v zadání 857. Konkrétně 1 + 2 + 3 + … + 39 + 40 = 820 a po přičtení čísla 37, které bylo započítáno dvakrát, obdržíme skutečně 1 + 2 + 3 + … + 39 + 40 + 37 = 857.
Ukažme si ještě, jak bychom mohli odhadnout počet čísel v součtu a určit jeho přesnou hodnotu (abychom nemuseli všechna čísla zadávat do kalkulačky např. v případě výrazně většího chybného součtu v zadání úlohy). Všimněme si, že čísla v součtu 1 + 2 + 3 + … + (n – 2) + (n – 1) + n můžeme rozdělit do dvojic, které dávají vždy stejný součet. Platí totiž 1 + n = 2 + (n – 1) = 3 + (n – 2) atd. Počet těchto dvojic je přitom roven polovině počtu všech čísel neboli $\frac{n}{2}$. Proto platí:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 2) + (n - 1) + n = \frac{n}{2} \cdot (1 + n)$$

Vynásobíme-li obě strany rovnosti dvěma, pak dostáváme poznatek, že dvojnásobek součtu všech čísel je roven součinu $n \cdot (n + 1)$, tj. je „o něco" větší než druhá mocnina počtu čísel n. Aplikujeme-li uvedené poznatky na naši úlohu, pak $2 \cdot 857 = 1714$. Přitom $40^2 = 1600$, čísel proto bude kolem 40 (ve skutečnosti je jich přesně 40 + jedno navíc započítané dvakrát). Náš výpočet na kalkulačce můžeme tedy zrychlit užitím uvedeného pravidla $1 + 2 + 3 + \cdots + 38 + 39 + 40 = 20 \cdot 41 = 820$.
Na závěr poznamenejme, že uvedené poznatky o součtu prvních n přirozených čísel prováděl slavný matematik Karl Friedrich Gauss (1777-1855) již ve svém raném dětství, když hned po nástupu na základní školu určil správně hodnotu součtu $1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100 = 50 \cdot 101 = 5050$.