14. úloha (sobota 14. 12. 2024)

Pozorujeme bakterie, které se množí podle následujícího pravidla: Každá bakterie žije jednu hodinu a za každou půlhodinu vytvoří novou bakterii (tj. dvě bakterie za svůj život).
Jak velké bude žijící potomstvo jedné bakterie za pět a půl hodiny po jejím vzniku?

Řešení: 233 bakterií
Počet správných odpovědí: 8

Postup: Ukážeme, že vývoj počtu bakterií v půlhodinových intervalech tvoří členy Fibonacciho posloupnosti, tj. posloupnosti, v níž její libovolný člen získáme jako součet dvou předchozích členů. Vývoj počtu bakterií v čase vyjádříme pomocí následujícího schématu, v němž řádky tvoří půlhodinové intervaly, ve sloupcích jsou jednotlivé bakterie a číslo udává jejich stáří v půlhodinách.

0																					
1	0																				
2	1	0	0																		
	2	1	1	0	0	0															
		2	2	1	1	1	0	0	0	0	0										
				2	2	2	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0		atd.

Počet bakterií v daném čase je dán tedy počtem jedniček a nul, neboť bakterie staré jednu hodinu (2 půlhodiny) umírají. Všimněme si, že např. pátý řádek (udávající počet bakterií za dvě hodiny) vytvoříme jednoduše tak, že 0 a 1 z předchozího řádku zvětšíme o 1 a dále připočteme právě tolik 0, jako je počet těchto 0 a 1 z předchozího řádku. To ale znamená, že počet bakterií v této fázi vývoje je dán součtem počtu 0 (což je ale počet 0 a 1 neboli všech bakterií v předchozí fázi) a počtu 1, které jsme však obdrželi ze všech 0 v předchozí fázi (a tedy opět všech 0 a 1 neboli všech bakterií v předpředchozí fázi). Jinými slovy počet bakterií v dané fázi získáme pomocí součtu bakterií v dvou předchozích fázích, čímž obdržíme Fibonacciho posloupnost: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233 atd. Jelikož první člen 1 udává počáteční stav (po 0 hodinách), dvanáctý člen 233 bude udávat stav po pěti a půl hodinách (11 půlhodinách).