10. úloha (úterý 10. 12. 2024)

Žebřík má celkem 7 příček. **Určete, kolika různými způsoby se můžete dostat ze země na poslední příčku**, jestliže jedním krokem dokážete jít vždy na příčku následující, nebo jít přes jednu příčku. Nikdy se však nemůžete vracet dolů. (Nerozlišujeme přitom došlápnutí pravou či levou nohou.)

Řešení: 21
Počet správných odpovědí: 26

Postup: Zadání úlohy lze z matematického pohledu formulovat následovně: Kolika způsoby můžeme číslo 7 rozložit na součet, v němž se vyskytují pouze čísla 1 a 2, pokud budeme zároveň rozlišovat, v jakém pořadí jsou čísla v součtu zapsána? Úlohy lze tedy řešit postupným vypsáním všech možností rozkladu čísla 7 na součet jedniček a dvojek, a poté určením, kolika způsoby můžeme čísla v daném součtu uspořádat. Obdržíme:
7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 … 1 způsob
= 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 … 6 způsobů (jak umístit jednu 2)
= 2 + 2 + 1 + 1 + 1 … 10 způsobů (jak umístit dvě 2)
= 2 + 2 + 2 + 1 … 4 způsoby (jak umístit tři 2, resp. jednu 1)
Celkem tedy máme 1 + 6 + 10 + 4 = 21 způsobů, kterými se lze dostat ze země na poslední příčku žebříku. Poznamenejme, že podobnými úlohami, v nichž se určuje počet různých způsobů uspořádání nějakých prvků, se zabývá matematická disciplína zvaná kombinatorika. Kombinatorické úvahy však můžeme provádět mnohem dříve než v posledním ročníku studia, kdy se u nás na gymnáziu tato oblast probírá. Chceme-li např. zjistit, kolika způsoby lze uspořádat tři 1 a dvě 2, pak můžeme uvažovat jedním z následujících dvou způsobů:

- První z celkem 5 míst obsadím jednou 2 a druhou 2 budu postupně posunovat, čímž obdržím všechna uspořádání, v nichž stojí 2 na prvním místě. **Jsou celkem 4** (počet míst pro druhou 2). Dále již tedy umístím na první místo 1 a na druhé místo 2, přičemž druhou 2 budu opět posunovat na jedno ze zbývajících 3 míst, čímž obdržím **další 3** uspořádání. Nyní již tedy uvažujeme pouze uspořádání začínající dvěma 1. Je-li opět nejprve na třetím místě 2, pak druhou 2 mohu umístit buď na čtvrté, nebo páté místo, čímž získám **další 2** uspořádání. **Poslední** uspořádání již začíná třemi 1, za nimiž jsou již vynuceně dvě 2. Celkem tedy existuje **4 + 3 + 2 + 1 = 10** různých uspořádání.
- Můžeme se také ptát, kolik způsoby můžeme najít dvě místa pro umístění dvou 2 (zbylá tři místa pak již nutně připadnou 1). První místo lze vybrat 5 způsoby a ať už jej zvolíme jakkoliv, tak k němu máme 4 možnosti pro druhé místo, celkem je tedy zdánlivě 5 · 4 = 20 způsobů. Tento počet však ještě musíme vydělit dvěma, neboť pokud jsem např. nejprve vybral pro umístění jedné 2 čtvrté místo, a poté třetí, tak je to stejná možnost jako vybrat nejprve třetí, a poté čtvrté místo (11**2****2**1 = 11**2****2**1). Celkově tedy máme $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ různých uspořádání.