

4. úloha (středa 4. 12. 2024)

Ač se to může zdát pro někoho překvapivé, existuje více než 20 přesmyček slova BIGY (např. GIYB) a dokonce více než 100 přesmyček slova GYMPL (např. PLYMG, MLPYG).

(zadání pro NG) Určete, která přesmyčka slova BIGY stojí na 19. místě, pokud je uspořádáme podle abecedy.

(zadání pro VG) Určete, která přesmyčka slova GYMPL stojí na 103. místě, pokud je uspořádáme podle abecedy.

Řešení: YBGI (NG), YLGMP (VG)

Počet správných odpovědí: 38

Postup: Úloha patří tematicky do oblasti matematiky zvané kombinatorika, my ji však nejprve vyřešíme bez příslušných kombinatorických znalostí.

(NG) Pokud si vypíšeme např. všechny přesmyčky začínající písmenem B, pak zjistíme, že jich existuje celkem 6 (BIGY, BIYG, BGIY, BGYI, BYGI, BYIG). Analogicky tedy bude existovat také 6 přesmyček začínající na každé ze zbylých písmen (z čehož mimo jiné vyplývá, že počet všech přesmyček je roven $4 \cdot 6 = 24$). Hledáme 19. přesmyčku, bude se tedy jednat o první přesmyčku v poslední, tj. čtvrté šestici přesmyček začínajících na poslední písmeno Y. Uspořádáme proto zbylá písmena podle abecedy, čímž obdržíme správné řešení YBGI.

(VG) Provedeme-li analogickou úvahu jako v zadání pro NG, pak zjistíme, že existuje vždy 24 přesmyček začínajících na dané písmeno (jedná se vlastně o počet všech přesmyček zbylých 4 písmen). Jelikož $4 \cdot 24 = 96$, budeme opět hledat v poslední, tj. páté skupině začínající na písmeno Y. Konkrétně se bude jednat o sedmou přesmyčku v této skupině ($103 = 96 + 7$). Rozdělíme-li přesmyčky ve skupině do šestic podle písmena, které následuje hned po Y, pak okamžitě vidíme, že jde o první přesmyčku ve druhé šestici (začínající vždy na druhé z písmen G, L, M, P, tj. L). Zbylá písmena jsou již nutně seřazena dle abecedy a dostáváme tak přesmyčku YLGMP.

Na závěr poznamenejme, že uvedené písmenné přesmyčky jsou typickým příkladem kombinatorických skupin, kterým říkáme permutace a jejich počet je vždy roven $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$, jestliže se jedná o slovo s n různými (!) písmeny. V našem případě proto existuje celkem $4! = 24$ přesmyček slova BIGY a $5! = 120$ přesmyček slova GYMPL. S těmito znalostmi bychom mohli zrychlit naše úvahy o dělení do stejně početných skupin dle počátečního písmena, jinak by byl postup analogický.

Poznámka k zadání a řešení úlohy: Ze zadání jasně nevyplývá, zda samotná slova BIGY a GYMPL zahrnout do výčtu všech přesmyček. Proto byly uznány i odpovědi YBIG a YLGPM, které jsou sousedními přesmyčkami prezentovaného řešení (a odpovídají správnému řešení úlohy, v níž zadaná slova nepovažujeme za přesmyčky). Jasnější formulace z úvodu zadání by mohla být např. následující: Použitím všech písmen slova BIGY je možné vytvořit více než 20 přesmyček (např. BIGY, GIYB).