Matematika – sbírka příkladů

Vzorové příklady pro opakování k profilové části maturitní zkoušky

1 Množiny, číselné obory, algebraické výrazy

1) Zapište výčtem prvků množiny:
   a) $A = \{n \in N; 3n < 15\}$
   b) $B = \{x \in R; x^2 - 4x + 3 = 0\}$

řešení: $A = \{1; 2; 3; 4\}, B = \{1; 3\}$

2) Zapište pomocí intervalů množiny:
   a) $C = \{x \in R; -2x > 18\}$
   b) $D = \{x \in R; |x - 4| \geq 5\}$

řešení: $C = (-\infty; -9), D = (-\infty; -1\rangle \cup \langle 9; +\infty)$

3) Zapište charakteristickou vlastností množiny:
   a) $E = \{3; 6; 9; 12; 15; 18; \dots\}$
   b) $F = \langle -7; 7\rangle$

řešení: $E = \{n \in N; 3|n\}, F = \{x \in R; -7 \leq x \leq 7\} = \{x \in R; |x| \leq 7\} = \{x \in R; x^2 \leq 49\}$ apod.

4) Jsou dány množiny $K = \{1; 2; 3; 4\}$, $L = \{n \in N; 5n > 10\}$, $M = \{2; 4; 8\}$, P množina všech přirozených sudých čísel menších než 10. Určete, které zápisy jsou pravdivé. Svá tvrzení zdůvodněte!
   a) $\{\,\} \subset L$
   b) $K \subset L$
   c) $K \cap L = \{2\}$
   d) $M \cap L = \{4; 8\}$
   e) $K \setminus L = \{3; 4\}$
   f) $K \setminus M = \{1; 2; 3\}$
   g) $M = P$
   h) $L'_N = \{1; 2\}$

řešení: Pravdivé jsou zápisy a, d, h.

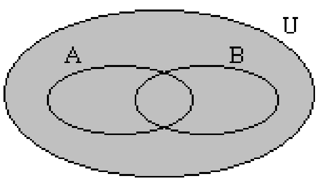
5) Jsou dány množiny $A = \{x \in Z : x - 1 < 0\}$, $B = \{x \in Z : -1 < x \leq 1\}$.
   a) Čemu se rovná $A \cup B$?
   b) Čemu se rovná $A \cap B$?

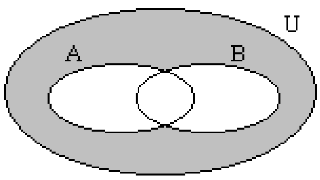
řešení: $A \cup B = \{x \in Z; x \leq 1\}, A \cap B = \{0\}$

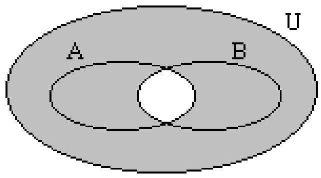
6) Je zadána libovolná základní množina U a její podmnožina A.
   Napište, čemu se rovná:
   a) $A \cup A'_U$
   b) $A \cap U$
   c) $A \cup \{\,\}$
   d) $(A'_U)'_U$

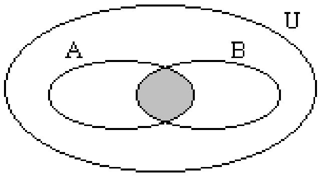
řešení: a) U; b) A; c) A; d) A

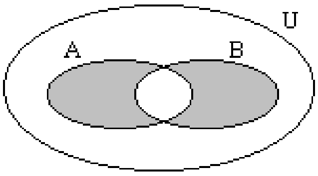
7) Je zadána libovolná základní množina U a její dvě podmnožiny A, B.
   a) Na kterém obrázku je **šedou** barvou vyznačeno $(A \cup B)'_U$?
   b) Na kterém obrázku je **šedou** barvou vyznačeno $A'_U \cup B'_U$?
   c) Jaká množina je vyznačena na obrázku č. 5?

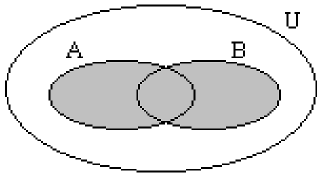
Obr.1


Obr.2


Obr.3


Obr.4


Obr.5


Obr.6


řešení: a) Obr. 2; b) Obr. 3; c) $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$

8) Je dána přímka AB. Zapište pomocí množinových a geometrických symbolů a určete výslednou množinu:
   a) Průnik polopřímky AB a polopřímky k ní opačné.
   b) Sjednocení polopřímek AB a BA

řešení: a) $\mapsto$ AB ∩ $\mapsfrom$ AB = {A}; b) $\mapsto$ AB ∪ $\mapsto$ BA = $\leftrightarrow$ AB

9) V rovině jsou dány dvě poloroviny. Pokud je to možné, znázorněte jejich vzájemnou polohu tak, aby jejich průnikem byl:
   a) ostrý úhel
   b) tupý úhel
   c) přímý úhel
   d) plný úhel

řešení: d) nelze

10) Jsou dány množiny $H = \langle -2; +\infty)$ a $G = (-5; 9\rangle$. Zapište a graficky na číselné ose znázorněte:
   a) průnik množin H a G
   b) sjednocení množin H a G
   c) rozdíl množin H a G
   d) rozdíl množin G a H
   e) doplněk množiny H v R
   f) doplněk množiny G v R

řešení: a) $H \cap G = \langle -2; 9\rangle$; b) $H \cup G = (-5; +\infty)$; c) $H \setminus G = (9; +\infty)$;
d) $G \setminus H = (-5; -2)$; e) $H'_R = (-\infty; -2)$; f) $G'_R = (-\infty; -5\rangle \cup (9; +\infty)$

11) Znázorněte ve Vennově diagramu pro dvě množiny $(A \cap B')'$ a $(A' \cup B)$ (do dvou obrázků). Porovnejte vybarvené oblasti. Předpokládejte, že množiny A, B jsou podmnožinami množiny C a vzhledem k ní určujte doplňky.

řešení: Vybarvené oblasti jsou stejné.

12) Znázorněte ve Vennově diagramu pro tři množiny $(A \cap B) \cup C$ a $A \cap (B \cup C)$. Porovnejte vybarvené oblasti.

řešení: Vybarvené oblasti nejsou stejné. Platí $[A \cap (B \cup C)] \subseteq [(A \cap B) \cup C]$.

13) Ze čtyřiceti rodin v jednom domě má 16 rodin auto i chatu. Přitom auto vlastní o 16 rodin více než chatu a není rodina, která by neměla chatu nebo auto.
a) Kolik rodin má auto?
b) Kolik rodin má pouze auto?

řešení: a) 36; b) 20.

14) Během jednoho roku vystoupila dvakrát v jednom městě známá rocková skupina. Z 450 studentů gymnázia se koncertu této skupiny aspoň jednou zúčastnilo 290 studentů, právě jednou 200 studentů. Počet studentů, kteří byli pouze na 1. koncertu, je třikrát větší než počet studentů, kteří byli pouze na 2. koncertu. Kolik studentů bylo a) na 1. koncertu, b) na 2. koncertu?

řešení: a) 240; b) 140.

15) Určete, které z následujících množin se rovnají:
$A = \{x \in N; x < 0\}$, $B = \{0\}$, $C = \{x \in R; -2 \leq x \leq 2\}$, $D = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$,
$E = \{x \in R; |x| \leq 2\}$, $F = \emptyset$, $G = \{x \in Z; -3 < x < 3\}$, $H = \{x \in R; |x| \leq 0\}$.

řešení: A = F, B = H, C = E, D = G.

16) Určete, která z následujících čísel jsou přirozená / celá / racionální / iracionální / reálná:
π;$\sqrt{5}$; 3; $\frac{7}{2}$; –12; $0,\overline{3}$; $\sqrt{-3}$; *e*; 3,14; $\sqrt{64}$.

řešení: $\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{3\,;\sqrt{64}}_{N};-12}_{Z};\frac{7}{2};0,\bar{3};3,14}_{Q};\underbrace{\pi;\sqrt{5};e}_{I}}_{R};\sqrt{-3}.$

17) Znázorněte (bez výpočtu) na číselné ose: $-\frac{5}{4}$; $3\frac{2}{7}$; $\sqrt{20}$; $3\sqrt{2}$; $5-\sqrt{3}$.

18) Vypočítejte, výsledek vyjádřete jako desetinné periodické číslo, určete periodu případně předperiodu a pak zaokrouhlete na tři desetinná místa / na dvě platné číslice $13 : 7$.

řešení: $13 : 7 = 1,\overline{857142}$; na tři desetinná místa 1,857; na dvě platné číslice 1,9.

19) Vyjádřete ve tvaru zlomku: $6,\overline{4}$; $2,01\overline{58}$.

řešení: a) $\frac{58}{9}$; b) $\frac{19\,957}{9\,900}$.

20) Vypočtěte:
$$\frac{\frac{1}{6} \cdot 0,1 + \frac{3}{5} : \left(-\frac{12}{7}\right)}{\frac{3}{7} \cdot \sqrt{2,25}}$$

řešení: $-\frac{14}{27}$.

21) Určete čtyřciferné přirozené číslo mající současně tyto vlastnosti:
- je dělitelné čísly 8 a 18,
- v desítkové soustavě má zápis *xxyy* ($x \neq y$),
- jeho ciferný součet je 18.

řešení: 5544.

22) Studentka si spočítala, že skripta přečte za jistý počet dní, prostuduje-li každý den 14 stran. Pokud si ponechá jeden den na zopakování, bude muset prostudovat 16 stran za den. Kolik stran mají skripta?

řešení: Skripta mají 112 stran.

23) Vyslovte pravidlo dělitelnosti číslem 36 a rozhodněte, zda je číslo 12 348 násobkem 36.

řešení: Číslo je dělitelné 36, právě když je dělitelné 4 a 9. Ano, je.

24) Určete y a $D(x, y)$, jestliže $x = 52$ a $n(x, y) = 11\,232$.

řešení: $y_1 = 864$, $D(x, y_1) = 4$ nebo $y_2 = 11\,232$, $D(x, y_2) = 52$.

25) Je číslo 493 prvočíslo? Zdůvodněte!

řešení: Ne, je dělitelné 17.

26) Určete výslednou množinu: a) $Z_0^- \cup N$, b) $R_0^+ - R_0^-$, c) $Q^+ \cap Q^-$, d) $Q \cup I$

řešení: a) Z; b) R^+; c) $\emptyset$; d) R.

27) Upravte do součinového tvaru tak, jak nejvíce je to možné:

a) $y^3 - 4y^2 - 9y + 36$

b) $9a^4b^2 + 6a^3b^2 + a^2b^2$

c) $x^6 - y^6$

d) $(p + r)^4 - r^4$

e) $9x^2 + 6x - 4a^2 + 1$

f) $x^2 - 1 + x^5 - x^3$

g) $27y^3 - 64x^3$

h) $(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2$

i) $x^2 - (a + 2)x + (1 + a)$

řešení: a) $(y - 4)(y - 3)(y + 3)$; b) $a^2b^2(3a + 1)^2$;
c) $(x - y)(x + y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$; d) $p(p + 2r)(p^2 + 2pr + 2r^2)$;
e) $(3x - 2a + 1)(3x + 2a + 1)$; f) $(x - 1)(x + 1)^2(x^2 - x + 1)$;
g) $(3y - 4x)(9y^2 + 12xy + 16x^2)$; h) $(a - b - c)(a - b + c)(a + b - c)(a + b + c)$;
i) $(x - 1)(x - a - 1)$

28) Upravte výrazy:

a) $|2 - x| - |x + 3|$

b) $|x^2| - |x|$

řešení: a) pro $x \in (-\infty; -3) : 5$, pro $x \in \langle -3; 2 \rangle$: $-2x - 1$, pro $x \in (2; +\infty)$: -5;
b) pro $x \in (-\infty; 0) : x^2 + x$, pro $x \in \langle 0; +\infty) : x^2 - x$.

29) Vydělte výrazy:

$$(12x^4 - 8x^3 - 17x^2 + 37x + 50) : (2x - 3)$$

řešení: $6x^3 + 5x^2 - x + 17 + \frac{101}{2x-3} \left(x \neq \frac{3}{2}\right).$

30) Vydělte výrazy:

$$(5 + 3x^2 - 6x^4 - 3x + 10) : (2x^3 - 2x^3 + 3)$$

řešení: $-2x^4 + x^2 - x + 5.$

31) Upravte výraz a určete podmínky, za nichž je definován:

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{2x}{x^2-1}$$

řešení: $\frac{2}{x+1} (x \neq \pm 1).$

32) Vyjádřete ze vzorce neznámou *a* a *t*.

$$s = \frac{1}{2}at^2 + vt$$

řešení: $a = \frac{2s}{t^2} - \frac{2v}{t} (t \neq 0), t_{1,2} = \frac{-v \pm \sqrt{v^2 + 2as}}{a} (a \neq 0, v^2 \geq -2as).$

33) Zjednodušte a určete, kdy má výraz smysl:

$$\frac{a-b}{a+b} : \left(1 - \frac{a}{b}\right)$$

řešení: $-\frac{b}{a+b} (a \neq \pm b, b \neq 0).$

34) Zjednodušte a určete, kdy má výraz smysl:

$$\frac{x^2-1}{4x^5} - 2 \cdot \frac{1 - x^{n-4}}{16x^{n-1}} - \frac{3x^{n-2} - x^2}{8x^{n+1}}$$

řešení: $-\frac{1}{4x^5} (x \neq 0).$

35) Zjednodušte a určete, kdy má výraz smysl:

$$\left(\frac{z}{z-1} - \frac{3z-1}{z^2-1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{z}\right)$$

řešení: $\frac{z-1}{z} (z \neq \pm 1, z \neq 0).$

36) Zjednodušte a určete, kdy má výraz smysl:

$$\left(\frac{a-3}{1+3a} - \frac{a-4}{1+4a}\right) : \left(1 + \frac{a-3}{1+3a} \cdot \frac{a-4}{1+4a}\right)$$

řešení: $\frac{1}{13} \left(a \neq -\frac{1}{3}, a \neq -\frac{1}{4}\right).$

37) Zjednodušte a určete, kdy má výraz smysl:

$$\frac{\frac{x^2+x-2}{x^2+3x-4} - \frac{x^2+x-12}{x^2-x-6}}{\frac{x^2-x-6}{x^2+x-12} - \frac{x^2+3x-4}{x^2+x-2}}$$

řešení: $1 \, (x \neq -4, x \neq -3, x \neq -2, x \neq 1, x \neq 3).$

2 Výroková logika, důkazové úlohy

1) Rozhodněte, která následující tvrzení jsou výroky, určete jejich pravdivostní hodnotu a negujte je.
   - *a:* Maturuješ z matematiky?
   - *b:* Barcelona je hlavní město Španělska.
   - *c:* $2x - 3 = 5$.
   - *d:* Každé prvočíslo má právě dva různé přirozené dělitele.
   - *e:* $\sqrt{3} - 2 < 0$.
   - *f:* V naší galaxii existuje alespoň jedna mimozemská civilizace.

řešení: a, c nejsou výroky; *b* je nepravdivý výrok; *d, e* jsou pravdivé výroky; *f* je hypotéza.
$\neg b$: Barcelona není hlavním městem Španělska.
$\neg d$: Existuje prvočíslo, které má nejvýše jednoho nebo alespoň tři různé přirozené dělitele.
$\neg e$: $\sqrt{3} - 2 \geq 0$.
$\neg f$: V naší galaxii neexistuje žádná mimozemská civilizace.

2) Sestavte tabulku pravdivostních hodnot: $(A \wedge \neg B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge B)$

3) Sestavte tabulku pravdivostních hodnot: $(A \Rightarrow \neg B) \vee (B \Rightarrow A)$

4) Sestavte tabulku pravdivostních hodnot: $[B \Leftrightarrow (A \Rightarrow C)] \wedge [(B \vee C) \Rightarrow (A \vee C)]$

5) Je dán výrok „Jestliže je Bratislava hlavním městem Slovenské republiky, pak Žilina není hlavním městem Spolkové republiky Německo.“ Napište jeho negaci a obměněnou implikaci původního výroku.

řešení: Negace: „Bratislava je hlavním městem Slovenska a (zároveň) Žilina je hlavním městem SRN.
O. i.: „Jestliže je Žilina hlavním městem SRN, pak Bratislava není hlavním městem Slovenska.

6) Je dán složený výrok:
   $\neg (A \vee \neg B) \Rightarrow B$, kde A: Dnes bude v Praze pršet. B: Zůstanu doma.
   Je tento výrok kontradikce?
   Napište zadaný výrok slovy.

řešení: Není kontradikce, jde o tautologii.
Slovy: „Jestliže není pravda, že dnes bude v Praze pršet nebo nezůstanu doma, pak zůstanu doma.

7) K implikaci „Jestliže je ráno, pak mám dobrou náladu.“ vyslovte:
   a) obrácenou implikaci
   b) obměněnou implikaci
   c) negaci

řešení: a) „Jestliže mám dobrou náladu, pak je ráno.“
b) „Jestliže nemám dobrou náladu, pak není ráno.“
c) „Je ráno a nemám dobrou náladu.“

8) Napište negaci $[B \Rightarrow (A \wedge C)] \wedge [(C \Rightarrow B) \Rightarrow A]$

řešení: $[B \wedge (\neg A \vee \neg C)] \vee [(C \Rightarrow B) \wedge \neg A]$.

9) Někteří hazardéři nejsou inteligentní. Všichni hazardéři jsou obětaví lidé.
Který závěr jednoznačně vyplývá z původních tvrzení?

- Někteří inteligentní lidé se nikdy nestanou hazardéry.
- Všichni obětaví lidé nejsou inteligentní.
- Všichni hazardéři nejsou obětaví.
- Někteří obětaví lidé nejsou inteligentní.
- Někteří hazardéři nejsou lidé.

řešení: Někteří obětaví lidé nejsou inteligentní.

10) Určete, který závěr vyplývá z následujících předpokladů:
Jestliže Jarda nepřišel ke snídani, pak je nemocný. Jarda přišel ke snídani.

- Jarda je unavený.
- Jarda je doma.
- Jarda přišel ke snídani.
- Jarda je nemocný.
- Jarda není nemocný.

řešení: Jarda přišel ke snídani.

11) Napište negace výroků: (Bez použití formulace typu „Není pravda, že ...“)

- Žádný učený z nebe nespadl.
- Nejvýše jedno prvočíslo je sudé.

řešení: Existuje alespoň jeden učený, který spadl z nebe. Alespoň dvě prvočísla jsou sudá.

12) Adélka pronesla výrok: „Jestliže nebudu mít hlad nebo nebudu mít žízeň, sním sušenku.“
Potom Adélka udělala toto:
a) Adélka neměla hlad, měla žízeň a sušenku snědla.
b) Adélka neměla hlad ani žízeň a sušenku nesnědla.
c) Adélka měla hlad i žízeň a sušenku snědla.
V kterých případech byl její výrok pravdivý?
Napište jeho negaci.

řešení: V případech a, c. Negace: „Nebudu mít hlad nebo žízeň a zároveň nesním sušenku.“

13) Agáta pronesla výrok: „Jestliže bude pršet, přijedu <u>nebo</u> jestliže nebude pršet, nepřijedu.“
Ve skutečnosti se pak stalo toto:
a) Pršelo a přijela.
b) Pršelo a nepřijela.
Ve kterých případech je Agátin výrok pravdivý a ve kterých nepravdivý? Dokažte proč.

řešení: V obou případech. Jde o tautologii.

14) Negujte následující výroky:
a) Přiletí vám do úst nejvýše dva pečení holubi.
b) Každý je svého štěstí strůjcem.
c) Bez práce nejsou koláče.

řešení: a) Přiletí vám do úst alespoň tři pečení holubi.
b) Existuje někdo, kdo není svého štěstí strůjcem.
c) Alespoň jedny koláče jsou bez práce.

15) Negujte následující výroky a rozhodněte o pravdivosti původních výroků resp. jejich negací

a) Každý trojúhelník je pravoúhlý.
b) Aspoň jedno prvočíslo je sudé.
c) Čísla 117 a 64 nemají žádného společného dělitele.

řešení: a) Alespoň jeden trojúhelník není pravoúhlý.
b) Všechna prvočísla jsou lichá.
c) Čísla 117 a 64 mají alespoň jednoho společného dělitele.
Pravdivé jsou výroky b), c) a negace výroku a).

16) Negujte následující výroky a rozhodněte o pravdivosti původních výroků resp. jejich negací

a) $\forall x, y \in R: (x+y)^2 < 0$
b) $\exists n \in N: \binom{n}{0} = 1$
c) $\forall n \in N \exists\ p \in N : p\,|n$

řešení: a) $\exists x, y \in R : (x+y)^2 \geq 0$. b) $\forall n \in N : \binom{n}{0} \neq 1$. c) $\exists n \in N \forall p \in N : p \nmid n$.
Pravdivé jsou výroky b), c) a negace výroku a).

17) K tvrzení: „Objekt nemá vlastnost A právě tehdy, když má vlastnost B.“ vyberte ekvivalentní tvrzení:

a) Objekt má vlastnost A v případě, že nemá vlastnost B, a pouze v tomto případě.
b) Objekt, který nemá vlastnost B, nemusí mít vlastnost A.
c) Objekt, který nemá vlastnost B, nemůže nemít vlastnost A.
d) Objekt, který má vlastnost A, nemá nikdy vlastnost B.
e) Objekt, který má vlastnost B, nemůže mít i vlastnost A.

řešení: a.

18) Petr a Pavel čekají na své spolužáky Adama, Bedřicha a Cyrila. Petr tvrdí: „Přijde-li Adam a Bedřich, přijde i Cyril“. Pavel říká: „Jestli přijde Adam a nepřijde Cyril, nepřijde ani Bedřich“. Jsou výroky obou chlapců logicky ekvivalentní?

řešení: Ano.

19) Adam řekl: „Jestli se Německo letos dostane do finále, vyhraje i finálový zápas“. Blanka mu odpověděla: „To není pravda.“ Cyril řekl: „Jestli se Německo letos dostane do finále, finálový zápas prohraje“. Čí výrok byl pravdivý za předpokladu, že se Německo do finále nedostalo?

řešení: Adamův a Cyrilův.

20) Dokažte větu: „Součet velikostí vnitřních úhlů libovolného trojúhelníku je roven 180°.“

postup: Přímý důkaz pomocí střídavých úhlů.

21) Dokažte sporem větu: „Pro všechna přirozená čísla n platí: je-li n^2 sudé, pak n je sudé.“

postup: Ke sporu vede předpoklad, že n je liché, tj. lze zapsat ve tvaru $n = 2k + 1$.

22) Dokažte, že pro každé $n \in N$ je číslo $n^3 - n$ dělitelné šesti.

postup: Přímý důkaz využívající rozkladu na součin, případně důkaz matematickou indukcí.

23) Dokažte, že pro každé $n \in N$ je číslo $n^3 + 2n$ dělitelné třemi.

postup: Přímý důkaz. Výraz rozložíme na součin a postupně dosadíme $n = 3k, n = 3k + 1, n = 3k + 2$.

24) Dokažte, že pro každé $n \in N$ platí $12|(n^4 - n^2)$.

postup: Přímý důkaz využívající rozkladu na součin.

25) Dokažte, že pro všechna přirozená čísla *n* platí rovnost:
$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$.

postup: Důkaz matematickou indukcí.

26) Dokažte, že pro všechna přirozená čísla *n* platí rovnost:
$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

postup: Důkaz matematickou indukcí.

3 Lineárně lomená funkce, rovnice a nerovnice v součinovém a podílovém tvaru

1) Sestrojte graf funkce:
   a) $f: y = \frac{2x-3}{x-1}$
   b) $f: y = \left|\frac{2x-3}{x-1}\right|$
   c) $f: y = \frac{-x+5}{x+2}$
   d) $f: y = \left|-2 + \frac{1}{x-2}\right|$
   e) $f: y = -2 + \frac{1}{|x|-2}$
   f) $f: y = \frac{x+|x-2|}{x-1}$

2) Funkce $f: y = \frac{x+2}{x-1}$ je:
   a) rostoucí v intervalu $(-\infty; 1)$
   b) klesající v intervalu $(1; \infty)$
   c) rostoucí v intervalu $\langle 1; \infty)$
   d) klesající v intervalu $(-\infty; 1\rangle$

řešení: b.

3) Funkce $f: y = \frac{3}{x+3} + 2$:
   a) protíná pouze osu *x*,
   b) protíná pouze osu *y*,
   c) protíná obě osy *x*, *y*,
   d) neprotíná žádnou z os *x*, *y*.

řešení: c.

4) Určete předpis inverzní funkce k funkci $f\colon y = \frac{2+x}{2-x}$.

řešení: $f^{-1}\colon y = \frac{2x-2}{x+1}$.

5) Určete předpis lineární lomené funkce, jestliže víte, že prochází bodem [3; –1], číslo 1 nepatří do jejího definičního oboru a číslo –2 nepatří do jejího oboru hodnot.

řešení: $y = \frac{-2x+4}{x-1}$.

6) Určete, zda jsou dané funkce sudé / liché ve svém definičním oboru a nalezněte intervaly monotonie těchto funkcí:
   a) $f\colon y = \frac{1}{x}$
   b) $f\colon y = -\frac{2}{x}$

řešení: Obě funkce jsou liché.
$y = \frac{1}{x}$ je klesající na $I_1 = (-\infty\,; 0)$, $I_2 = (0\,; +\infty)$, $y = -\frac{2}{x}$ je rostoucí na I_1, I_2.

7) Určete definiční obor funkce $f\colon y = \frac{1}{|x+3|-4}$

řešení: $D_f = R \setminus \{-7; 1\}$.

8) Řešte nerovnici: $\frac{2x-3}{x^2(x-1)\cdot(x+3)} > 0$

řešení: $K = (-3; 0) \cup (0; 1) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

9) Řešte nerovnici: $(x-3)\cdot(x+5) \geq 0$

řešení: $K = (-\infty; -5\rangle \cup \langle 3; +\infty)$.

10) Řešte nerovnici: $\frac{x^2+6x-7}{|x+4|} < 0$

řešení: $K = (-7; -4) \cup (-4; 1)$.

11) Řešte nerovnici: $\frac{x+3}{3x+3} < 3$

řešení: $K = (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

12) Řešte nerovnici: $\frac{3x+1}{x-2} \geq 2$

řešení: $K = (-\infty; -5\rangle \cup (2; +\infty)$.

13) Řešte nerovnici: $0 < \frac{5-x}{x-3} < 1$

řešení: $K = (4; 5)$.

4 Funkce lineární, lineární rovnice a nerovnice a jejich soustavy (vč. rovnic s parametrem a absolutní hodnotou)

1) Sestrojte grafy funkce: a) $f: y = -6x + 1,\ x \in \langle -1; 4)$
b) $f: y = 3 + 2x,\ x \in (-3; 1\rangle$
c) $f: y = |x - 1|$
d) $f: y = \big||x| - 1\big|$

2) Které z funkcí z předchozího příkladu jsou ve svém definičním oboru prosté?

řešení: Funkce a, b.

3) Sestrojte graf funkce $f: y = -|x - 1| + |x + 1|$.

4) Sestrojte graf funkce $f: y = |2x - 3| + |x + 1| + x + 6$.

5) Je dána funkce $f: y = -1 + 3x,\ x \in \langle -3; 3\rangle$. Rozhodněte, které z bodů [0; –1], [2; 5], [–6; 8], [–2; –8], [5; 14] patří do jejího grafu.

řešení: Body [0; –1], [2; 5].

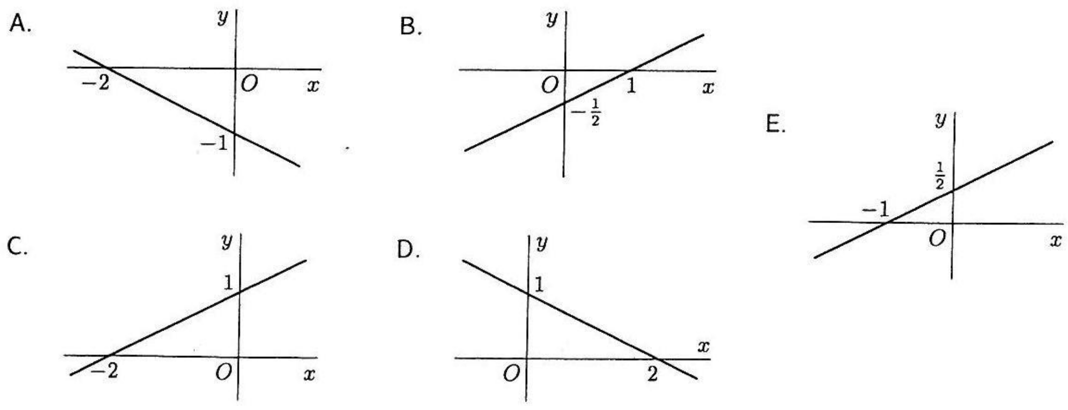
6) Pro lineární funkci *f* platí: $f(1) = 1,\ f(3{,}5) = -7$. Napište předpis této funkce.

řešení: $y = -\frac{16}{5}x + \frac{21}{5}$.

7) Je dána funkce $g(x) = 2x - 3$. Rozhodněte, zda existuje $x \in R$ tak, aby platilo:
a) $g(x^2) = [g(x)]^2 - 2$
b) $g(x + 6) = g(6x)$

řešení: a) $x_1 = 1, x_2 = 5$; b) $x = \frac{6}{5}$.

8) Určete, na kterém obrázku je graf inverzní funkce k funkci $f: y = 2x + 1$.



řešení: B.

9) Graficky i početně řešte soustavu $x + 2y - 6 = 0$
$|x - 3| - y = 0$.

řešení: [0; 3], [4; 1].

10) Z plné nádrže o objemu 1 200 *l* vytéká voda rychlostí 3 *l/s*. Najděte:
a) funkci udávající množství vyteklé vody v *l* za danou dobu v *s*;
b) funkci udávající, kolik *l* vody ještě v nádrži zbývá v daném čase.
Sestrojte grafy obou funkcí v téže soustavě souřadnic.

řešení: a) $y = 3x, x \in \langle 0; 400 \rangle$; b) $y = -3x + 1200, x \in \langle 0; 400 \rangle$.

11) Řešte rovnici v oboru Z:
$\frac{3(x+1)}{2} - \left(\frac{x+1}{4} + 1\right) = \frac{5x+1}{7} - \left(\frac{3x-1}{2} - 3\right)$

řešení: $x = \frac{5}{3}$, v Z tedy nemá řešení.

12) Řešte rovnici v oboru R:
$\frac{\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}}{\frac{3}{2}x - 1} + \frac{\frac{5}{3}x - \frac{4}{3}}{x - \frac{2}{3}} = 2$

řešení: $K = \{2\}$.

13) Řešte rovnici v oboru R:
$\frac{2}{(1-3x)(3x+11)} = \frac{1}{(3x-1)^2} - \frac{3}{(3x+11)^2}$

řešení: $K = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$.

14) Řešte nerovnici v N:
$\frac{x+2}{4} - \frac{x-25}{5} + \frac{x-3}{7} < 7$

řešení: $K = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

15) Řešte nerovnici v R:
$\frac{x^2+1}{2x+3} > 0$

řešení: $K = \left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

16) Řešte rovnici v oboru R, p je reálný parametr:
$\frac{p}{x} - \frac{4}{px} = 1 - \frac{2}{p}$

řešení: Pro $p = 0$ nemá rovnice smysl,
pro $p = 2$ je $K = \mathrm{R} \setminus \{0\}$, pro $p = -2$ je $K = \{\,\}$,
pro $p \in \mathrm{R} \setminus \{0; \pm 2\}$ je $K = \{p + 2\}$

17) Řešte rovnici v oboru R, p je reálný parametr:
$\frac{3}{(p-1)(x+1)} + \frac{2}{p(x-3)} = \frac{x-5}{p(x+1)(x-3)}$

řešení: Pro $p \in \{0; 1\}$ nemá rovnice smysl,
pro $p \in \left\{-1; \frac{1}{4}\right\}$ je $K = \{\,\}$, pro $p \in \mathrm{R} \setminus \left\{0; \pm 1; \frac{1}{4}\right\}$ je $K = \left\{\frac{2p+7}{4p-1}\right\}$

18) Řešte rovnici v R:
$|x + 1| + 3|x - 1| = 2|x| + 3 - x$

řešení: $K = \left\{-1; \frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right\}$.

19) Řešte nerovnici v R:

$$\left|\frac{2x-3}{x-2}\right| \geq 3$$

řešení: K = $\left\langle\frac{9}{5}; 2\right) \cup (2\,; 3\rangle$.

20) Řešte nerovnici v R:

$$|x-4| + 5|x-1| + x - 5 > 3|x-2|$$

řešení: K = $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

21) Nakladatelství připravuje vydání nové knihy. Náklady na každý z prvních 370 výtisků dosahují 480 Kč. Náklady na každý další výtisk jsou však už jen 45 Kč. Nakladatelství se rozhodlo prodávat knihu po 230 Kč. Jaký nejmenší počet výtisků musí nakladatelství vydat, aby za předpokladu, že všechny výtisky prodá, nebylo vydání knihy ztrátové?

řešení: 870.

22) Skupina stejně výkonných brigádníků ručně česala chmel na dvou stejně úrodných chmelnicích. První chmelnice měla dvakrát větší výměru než druhá chmelnice. Polovinu dne pracovali všichni brigádníci na větší chmelnici, druhou polovinu dne šla polovina z nich pracovat na menší chmelnici. Na konci dne byla větší chmelnice očesána, ale na menší chmelnici museli tři brigádníci pracovat ještě celý druhý den. Kolik bylo brigádníků?

řešení: 24.

23) Student se vrací z koleje na víkend domů. Ve městě vzdáleném 27 km od jeho bydliště mu ujel autobus. Proto zatelefonoval otci a domluvil se, že vyjde pěšky a otec mu pojede naproti autem. Vyšel současně s výjezdem auta a jde stálou rychlostí 5 km/h. Auto jede průměrnou rychlostí v km/h. Na otočení auta a nástup je třeba počítat 2 minuty.
   a) Vyjádřete v závislosti na rychlosti v km/h, za jak dlouho se student dostane z města domů.
   b) Jaká musí být průměrná rychlost auta, aby se student dostal domů nejpozději za 1,5 hodiny?

řešení: a) $t = \frac{v+1625}{30(5+v)}$; b) $v \geq \frac{350}{11}$.

24) Kolik litrů vody 48 °C teplé je třeba přidat do 1,2 hl vody 8 °C teplé, aby směs měla teplotu 24 °C?

řešení: 80.

25) Řešte soustavu rovnic s reálnými neznámými:

$$(x-1):(x+15) = (y-6):(y+2)$$
$$(x-3):x = (y-4):(y-1)$$

řešení: $[x; y] = [9; 10]$.

26) Řešte soustavu rovnic s reálnými neznámými:

$$2x + y - 7 = 0$$
$$|x-y| = 2$$

řešení: $[x\,; y] \in \left\{\left[\frac{5}{3}; \frac{11}{3}\right]; [3\,; 1]\right\}$.

27) Řešte soustavu rovnic s reálnými neznámými:

$$\frac{6}{x+y}+\frac{5}{y+3z}=2$$
$$\frac{15}{x+y}-\frac{4}{x-2z}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{10}{y+3z}-\frac{7}{x-2z}=-\frac{3}{2}$$

řešení:$[x\,;y\,;z]=[4\,;2\,;1]$.

28) Řešte soustavu nerovnic s reálnými neznámými:

$$\frac{7-x}{2}-3<\frac{3+4x}{5}-4$$
$$\frac{5}{3}x+5(4-x)<2(4-x)$$

řešení: $K=(9,+\infty)$.

29) Budou-li dvě čerpadla o různých výkonech pracovat společně, splní úkol za 6 hodin. Kdyby první rypadlo pracovalo 4 hodiny a druhé 6 hodin, splnila by rypadla 80 % úkolu. Za jak dlouho by splnilo úkol každé rypadlo samo?

řešení: První za 10 hodin, druhé za 15 hodin.

30) Ve dvou sudech je nalita voda. Jestliže z prvního sudu nalijeme do druhého sudu právě tolik litrů vody, kolik už v něm je, a potom z druhého sudu do prvního tolik litrů, kolik už je v prvním sudu a opět z prvního sudu nalijeme do druhého sudu tolik litrů vody, kolik litrů už v něm je, bude v každém sudu 160 l. Kolik litrů vody bylo v každém sudu na začátku?

řešení: V prvním 220 litrů, ve druhém 100 litrů.

31) Vlak projíždí tunelem dlouhým 220 m. Od okamžiku, kdy do tunelu vjede lokomotiva, až do okamžiku, kdy poslední vagón opustí tunel, uplyne 19 sekund. Od tohoto okamžiku uplyne dalších 42 sekund, než lokomotiva dojede k výhybce, která je ve vzdálenosti 1 km od konce tunelu. Předpokládejte, že vlak jede konstantní rychlostí. Určete tuto rychlost a délku vlaku.

řešení: 72 km/h; 160 m.

5 Funkce mocninná, funkce odmocniny, výpočty s mocninami a odmocninami

1) Funkce $f: y=x^3-1$ je:
a) sudá
b) lichá
c) omezená
d) rostoucí

řešení: d.

2) Funkce $f: y=-|x^6|$ je:
a) sudá a má maximum
b) sudá a má minimum
c) sudá, zdola omezená
d) lichá, není omezená

řešení: a.

3) Funkce $f: y = x^{-1} + 2$: a) je sudá, není omezená
b) je sudá, omezená
c) je lichá, není omezená
d) není omezená

řešení: d.

4) Určete definiční obor, obor hodnot, intervaly monotónnosti a načrtněte graf funkce $f: y = 1 - |x^5|$.

řešení: $D_f = R$; $H_f = (-\infty; 1\rangle$; rostoucí na $I_1 = (-\infty; 0\rangle$, klesající na $I_2 = \langle 0; +\infty)$.

5) Určete definiční obory funkcí: a) $f: y = \sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$

b) $f: y = \frac{\sqrt[3]{x}}{x}$

c) $f: y = \sqrt[4]{x^2 - 1}$

řešení: a) $D_f = (-\infty; -3\rangle \cup (2; +\infty)$; b) $D_f = R \setminus \{0\}$; c) $D_f = (-\infty; -1\rangle \cup \langle 1, +\infty)$.

6) Určete definiční obory funkcí:
a) $f: y = \sqrt{x^2 - 8x + 12}$

b) $f: y = \frac{1}{\sqrt{x(x-7)}}$

c) $f: y = \sqrt{\frac{x+2}{4x-6}}$

d) $f: y = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x-6}}$

řešení: a) $D_f = (-\infty; 2\rangle \cup \langle 6; +\infty)$; b) $D_f = (-\infty; 0) \cup (7; +\infty)$;
c) $D_f = (-\infty; -2\rangle \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$; d) $D_f = \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

7) Částečně odmocněte: $\sqrt{98}$; $\sqrt[3]{168}$.

řešení: $7\sqrt{2}$; $2\sqrt[3]{21}$.

8) Usměrněte: $\frac{15}{\sqrt{5}}$; $\frac{7}{\sqrt{13}+\sqrt{6}}$; $\frac{6}{\sqrt[3]{16}}$.

řešení: $3\sqrt{5}$; $\sqrt{13} - \sqrt{6}$; $\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$.

9) Vypočtěte: $\left|1 + \sqrt{2}\right| + \left|2 - \sqrt{2}\right|$

řešení: 3.

10) Vypočtěte: $\left(\sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}}\right)^2$

řešení: 10.

11) Vypočtěte:

$$\frac{-6,5^2 + 0,125 \cdot 0,5^{-2} : 2}{\left(\frac{4}{3}\right)^{-0,5}}$$

řešení: $-28\sqrt{3}$.

12) Vypočtěte:

$$\left(-\frac{-\sqrt{(-5)^2}}{\frac{1}{0,2^{-1}}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

řešení: 5.

13) Zjednodušte, pokud má výraz smysl: $(7^{-1} \cdot 5^3)^{-2} \cdot \left(\frac{7^2}{10}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{2 \cdot 7^2}{5^3}\right)^{-4}$

řešení: $\frac{5^8}{2^2 \cdot 7^{10}}$.

14) Zjednodušte na výraz obsahující jedinou odmocninu: $\sqrt{11^2 \cdot \sqrt[3]{7}} : \sqrt[3]{\frac{11\sqrt{11}}{7}}$

řešení: $\sqrt{77}$.

15) Zjednodušte, pokud má výraz smysl: $\left[\frac{-0,2^{\frac{\pi}{2}} \cdot 0,5^{-1}}{(0,2^2 \cdot 0,5)^{\pi}}\right]^{-2}$

řešení: $0,2^{3\pi} \cdot 0,5^{2\pi+2}$.

16) Co nejvíce zjednodušte výrazy a uveďte podmínky, za kterých mají smysl:

a) $\frac{a^3 b^{-2}}{b^5}$

b) $\frac{5^{-3} a^{-2}}{-a^3}$

c) $\frac{a^{-2}}{a^2} : \frac{-a^4}{a^6}$

d) $\left(\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{2}{-a^{-3}}\right)^{-2}}\right)^{-1}$

řešení: a) $\frac{a^3}{b^7}$ $(b \neq 0)$; b) $-\frac{1}{125a^5}$ $(a \neq 0)$; c) $-\frac{1}{a^2}$ $(a \neq 0)$; d) $\frac{1}{2a^6}$ $(a \neq 0)$.

6 Funkce kvadratická, kvadratické rovnice a nerovnice (vč. rovnic s parametrem a absolutní hodnotou)

1) Sestrojte grafy funkcí:
   a) $f: y = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2$
   b) $f: y = \left|\frac{1}{2}(x-1)^2 - 2\right|$
   c) $f: y = \frac{1}{2}(1-x)(x+5)$
   d) $f: y = \frac{1}{2}(1-x)|x+5|$
   e) $f: y = x^2 + 2x + 2$
   f) $f: y = x^2 + 2|x| + 2$

2) Graficky řešte nerovnici v R: $4 - x^2 \leq x^2 + 2$.

řešení: $K = (-\infty; -1\rangle \cup \langle 1; +\infty)$.

3) Graficky řešte nerovnici v R: $|x^2 - 4x + 3| > x^2 - 4x + 3$.

řešení: $K = (1; 3)$.

4) Kvadratická funkce $f: y = -2x^2 - 4x + 1$ je:
   a) zdola omezená, minimum v bodě $x = -1$
   b) zdola omezená, minimum v bodě $x = 3$
   c) shora omezená, maximum v bodě $x = -1$
   d) shora omezená, maximum v bodě $x = 3$

řešení: c.

5) Kolik čísel z množiny {–2; 0; 1; 4; 5; 7} patří do oboru hodnot funkce $f: y = -x^2 + 4x + 1$?

řešení: 5 čísel.

6) Určete, v jakém bodě x má funkce $f: y = |(2+x)(x-3)|, x \in \langle -2;\ 3\rangle$ své maximum.

řešení: $x = \frac{1}{2}$.

7) Určete koeficienty a, b, c funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$, aby platilo $f(0) = 2$, $f(2) = 4$, $f(-2) = 24$.

řešení: $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$.

8) Určete intervaly monotonie funkce $f: y = |x^2 - 2|$.

řešení: klesající na $I_1 = (-\infty; -\sqrt{2}\rangle$, $I_3 = \langle 0; \sqrt{2}\rangle$;
rostoucí na $I_2 = \langle -\sqrt{2}; 0\rangle$, $I_4 = \langle \sqrt{2}; +\infty)$.

9) Obraz bodu $X[-4; 3]$ ve středové souměrnosti se středem $S[-1; 1]$ leží na parabole:
   a) $f: y = 2x^2$ b) $f: y = -2x^2$ c) $f: y = x^2 + 3$ d) $f: y = -x^2 + 3$
   e) $f: y = x^2 - x + 1$

řešení: d.

10) Určete předpis kvadratické funkce *f*, víte-li, že platí: funkce *f* je sudá v *R*, hodnota minima je –8 a jeden z průsečíků grafu funkce s osou *x* má souřadnice v bodě [2; 0].

řešení: $f: y = 2x^2 - 8$.

11) Určete předpis kvadratické funkce *f*, víte-li, že platí: funkce *f* pro *x* = 2 nabývá maxima, přičemž hodnota maxima je 4 a osu *y* protíná graf funkce *f* v bodě [0; 1].

řešení: $f: y = -\frac{3}{4}x^2 + 3x + 1$.

Řešte rovnice v R:

12) $3x^2 = 6x$

řešení: $K = \{0; 2\}$.

13) $x^2 - |x| - 6 = 0$

řešení: $K = \{-3; 3\}$.

14) $x^2 - |2x - 3| = 0$

řešení: $K = \{-3; 1\}$.

15) $x^2 - |4x + 1| + 3 = 0$

řešení: $K = \{-2; 2 + \sqrt{2}; 2 - \sqrt{2}\}$.

16) $x \cdot |x + 2| = 3$

řešení: $K = \{1\}$.

17) $|x^2 - 2x - 3| = x + 1$

řešení: $K = \{-1; 2; 4\}$.

Řešte nerovnice v R:

18) $\frac{4}{|x+3|} \leq x$

řešení: $K = \langle 1; +\infty)$.

19) $x^2 - 3|x| - 4 \leq 0$

řešení: $K = \langle -4; 4 \rangle$.

20) Pro která reálná *m* má rovnice $x^2 - (m - 6)x + 18 - 3m = 0$ dva reálné kořeny?

řešení: $m \in (-\infty; -6) \cup (6; +\infty)$.

21) Pro která reálná *m* má rovnice $mx^2 + x + m = 0$ alespoň jeden reálný kořen?

řešení: $m \in \left\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle$.

22) Pro která reálná *m* má rovnice $3x^2 - 2mx + 3m = 0$ právě jeden reálný kořen?

řešení: $m \in \{0; 9\}$.

23) Sestavte kvadratickou rovnici, jejímiž kořeny jsou čísla –2 a 2.

řešení: $a(x^2 - 4) = 0$, kde $a \in R \setminus \{0\}$.

7 Iracionální rovnice a nerovnice

Řešte rovnice v R:

1) $\sqrt{2x-7}=5$

řešení: $K=\{16\}$.

2) $\sqrt{x+7}=x+5$

řešení: $K=\{-3\}$.

3) $3+\sqrt{x-1}=x$

řešení: $K=\{5\}$.

4) $\sqrt{5x+1}=x+1$

řešení: $K=\{0\,;3\}$.

5) $3\sqrt{x+5}=x-5$

řešení: $K=\{20\}$.

6) $\sqrt{5-x^2}=x-1$

řešení: $K=\{2\}$.

7) $2+\sqrt{10-x^2}=x$

řešení: $K=\{3\}$.

8) $\sqrt{x}+\sqrt{x+2}=0$

řešení: Nemá řešení v R.

9) $2\sqrt{3x+6}=3\sqrt{2x-4}$

řešení: $K=\{10\}$.

10) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}=2$

řešení: $K=\{7\}$.

11) $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6$

řešení: $K=\{-1\}$.

12) $\sqrt{2x+6}-\sqrt{x+1}=2$

řešení: $K=\{-1;15\}$.

13) $\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}=\sqrt{2x}$

řešení: $K=\{4\}$.

14) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=\sqrt{3x-1}$

řešení: $K=\{1\}$.

15) $\sqrt{x+\sqrt{11x+4}}=4$

řešení: $K=\{7\}$.

16) $\sqrt{1+\sqrt{x}}+\sqrt{6+\sqrt{x}}=5$

řešení: $K=\{9\}$.

Řešte nerovnice v R:

17) $2\sqrt{x-1}<x$

řešení: $K=\langle 1;2) \cup (2;+\infty)$.

18) $\sqrt{x+5}>x+3$

řešení: $K=\langle -5;-1)$.

8 Funkce exponenciální, exponenciální rovnice a nerovnice

1) Načrtněte graf funkce $f: y=2^x-2$.

2) Jaký tvar má inverzní funkce k funkci $f: y=2^x$ a v jakém vztahu jsou grafy obou funkcí?

řešení: $f^{-1}: y=\log_2 x$, grafy funkcí jsou souměrně sdružené podle přímky $y=x$.

3) Pro která kladná čísla a jsou funkce $f: y=a^x$, $g: y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ rostoucí, pro která klesající a pro která konstantní?

řešení: Pro $a>1$ je *f* rostoucí, *g* klesající; pro $a=1$ jsou *f*, *g* konstantní; pro $a<1$ je *f* klesající, *g* rostoucí.

4) Je dán čtverec o straně a. Jeho střední příčky jej dělí na čtyři shodné čtverce, každý z nich je opět jeho středními příčkami rozdělen na čtyři shodné čtverce atd.
   a) Napište předpis funkce, jíž je při *n*-tém dělení určen počet čtverců s nejkratší délkou strany.
   b) Napište předpisy funkcí, jimiž jsou určeny délka obvodu a obsah nejmenšího čtverce při *n*-tém dělení.

řešení: a) $f: y=4^n$; b) $o: y=2^{2-n}\cdot a$, $S: y=4^{-n}\cdot a^2$.

5) Načrtněte graf funkce $f: y=-2^{x+1}+3$.

6) Načrtněte graf funkce $f: y=|-2^{x-2}+2|$.

Řešte rovnice v R:

7) $3^{\frac{2}{x+2}}=\frac{1}{9}$

řešení: $K=\{-3\}$.

8) $3^3 \cdot 27^{2x-3} = 81^{3x-5}$

řešení: $K = \left\{\frac{7}{3}\right\}$.

9) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = \frac{40}{3}$

řešení: $K = \{-1\}$.

10) $6^{\frac{x}{2}} - 5^{\frac{x}{2}} = 6^{\frac{x}{2}-1}$

řešení: $K = \{2\}$.

11) $4^x + 2^x - 6 = 0$

řešení: $K = \{1\}$.

12) $3^{x+2} + 9^{x+1} = 180$

řešení: $K = \left\{\frac{\log 4}{\log 3}\right\}$.

Řešte nerovnice v R:

13) $2 \cdot 8^x \geq 0{,}25$

řešení: $K = \langle -1; +\infty)$.

14) $3^{x+1} + 4 \cdot 3^x \geq 21$

řešení: $K = \langle 1; +\infty)$.

9 Funkce logaritmická, logaritmické rovnice a nerovnice

Určete definiční obory funkcí:

1) $f: y = \log\sqrt{x+2}$

řešení: $D_f = (-2; +\infty)$.

2) $f: y = \log\left(\frac{1-x}{1+x} - 1\right)$

řešení: $D_f = (-1; 0)$.

3) $f: y = \log(|1-2x| - |x+1| - 2)$

řešení: $D_f = \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup (4; +\infty)$.

4) $f: y = \sqrt{\log_3(|x+2| - |2x-4|)}$

řešení: $D_f = \langle 1; 5\rangle$.

5) $f: y = \frac{\ln(3x+21)}{x^3-3x^2+2x}$

řešení: $D_f = (-7; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$.

6) $f: y = \frac{1}{\log x}$

řešení: $D_f = R^+ \setminus \{1\}$.

7) $f: y = \frac{\log(x^2-36)}{\sqrt{x^2-10x+21}}$

řešení: $D_f = (-\infty; -6) \cup (7; +\infty)$.

8) $f: y = \sqrt{\log_{\frac{1}{8}}(2x+1)}$

řešení: $D_f = \left(-\frac{1}{2}; 0\right\rangle$

9) Určete intervaly monotonie funkce $f: y = \log_{\frac{3}{4}}(x-2)$.

řešení: Klesající na $(2; +\infty)$.

10) Načrtněte graf funkce $f: y = \log_{0,5}(x+1)$.

11) Najděte všechna reálná u, pro která platí: $\log_{0,5} 7 \leq \log_{0,5} u$ (řešte graficky).

řešení: $0 < u \leq 7$.

12) S využitím grafu logaritmické funkce určete všechna reálná *x*, pro která platí:
a) $\log_8 x = 0$ b) $\log_8 x \leq 0$ c) $\log_8 x > 0$

řešení: a) $x = 1$; b) $x \in (0; 1\rangle$; c) $x \in (1; +\infty)$.

13) Načrtněte graf funkce $f: y = |\log(x-4)| - 1$.

14) Načrtněte graf funkce $f: y = \left|\log_{\frac{1}{2}} x + 1\right|$.

Řešte rovnice v R:

15) $2^{\log \frac{x}{3}} = 0{,}125$

řešení: $K = \{0{,}003\}$.

16) $\log_5(2x-1) = 2$

řešení: $K = \{13\}$.

17) $\log_x(x^2 - 2x + 2) = 1$

řešení: $K = \{2\}$.

18) $\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1$

řešení: $K = \{0\}$.

19) $\log(x-2)+\log(8x+4)=3$

řešení: $K=\{12\}$.

20) $\log\sqrt{3x-2}=\log(x-4)$

řešení: $K=\{9\}$.

21) $\log\sqrt{x-5}+\log\sqrt{2x-3}+1=\log 30$

řešení: $K=\{6\}$.

22) $\log_5 x+\frac{2}{\log_5 x}=3$

řešení: $K=\{5;25\}$.

23) $\log x^3+2=\frac{10}{\log x^2}$

řešení: $K=\left\{10;\frac{\sqrt[3]{10}}{100}\right\}$.

Řešte nerovnice v R:

24) $\log(2x-3)\geq 1$

řešení: $K=\left\langle\frac{13}{2};+\infty\right)$.

25) $\log_3 x+\log_3(x-2)\geq 1$

řešení: $K=\langle 3;+\infty)$.

26) $-1\leq\frac{1-2\log x}{x}<0$

řešení: $K=\left(\sqrt{10};+\infty\right)$.

10 Funkce goniometrické, goniometrické výrazy

1) Bez užití úhloměru sestrojte úhel α, jestliže:

a) $\sin\alpha=\frac{2}{3}$

b) $\cos\alpha=0{,}4$

c) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{7}{5}$

d) $\operatorname{cotg}\alpha=1{,}5$

řešení: Sestrojením vhodného pravoúhlého trojúhelníku nebo jednotkové kružnice.

2) Načrtněte grafy funkcí:

a) $y = -\sin x$

b) $y = 3\cos x$

c) $y = \cos x - 1$

d) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

e) $y = \sin\frac{x}{2}$

f) $y = \cos 2x$

g) $y = 2\sin x + 3$

h) $y = 2 - \sin x$

i) $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

j) $y = 2\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$

k) $y = |\cos 2x|$

3) Zjednodušte:

a) $\sin^2 x + \cos^2 x + \mathrm{tg}^2\, x$

b) $1 - \sin^2 x + \mathrm{cotg}^2\, x \cdot \sin^2 x$

c) $\dfrac{1}{1 + \sin x} + \dfrac{1}{1 - \sin x}$

d) $\dfrac{1}{1 + \mathrm{tg}^2\, x} + \dfrac{1}{1 + \mathrm{cotg}^2\, x}$

e) $\dfrac{\mathrm{tg}\, x \cdot \cos^2 x}{1 - \cos^2 x}$

f) $\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$

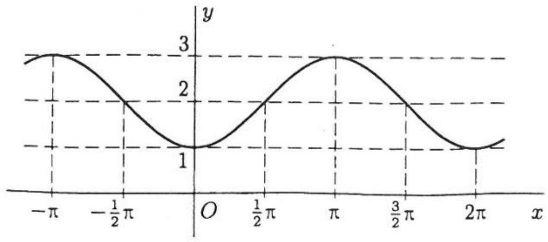
g) $\cos 2x + \sin 2x \cdot \mathrm{tg}\, x$

h) $\dfrac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x}$

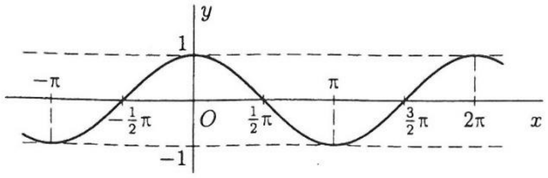
řešení: a) $\frac{1}{\cos^2 x}$ $(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z)$; b) $2\cos^2 x$ $(x \neq k\pi, k \in Z)$; c) $\frac{2}{\cos^2 x}$ $(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z)$; d) 1 $(x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in Z)$; e) $\mathrm{cotg}\, x$ $(x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in Z)$; f) $\sin x$; g) 1 $(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z)$; h) $\mathrm{tg}\, x$ $(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in Z)$

4) Určete, na kterém obrázku je graf funkce $f\colon y = \sin^2 x + \sin x + \cos^2 x$.

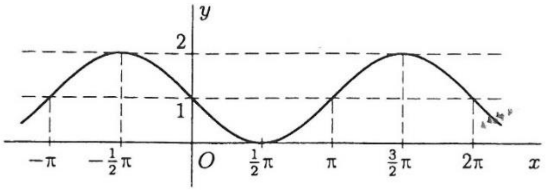
A.



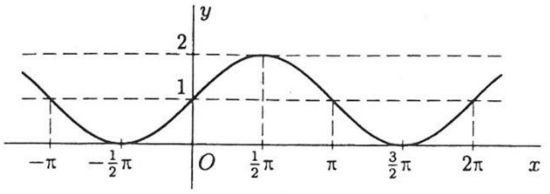
B.



C.



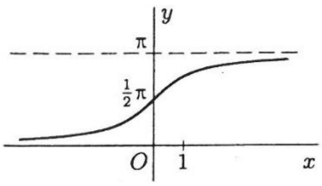
D.



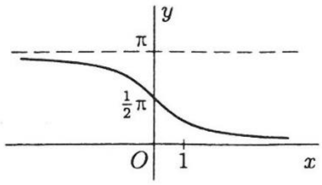
řešení: D.

5) Funkce tangens je v intervalu $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ prostá. Proto k funkci $f\colon y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ existuje inverzní funkce $f^{-1}\colon y = \operatorname{arctg} x$. Určete, na kterém obrázku je její graf.

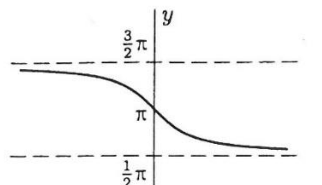
A.



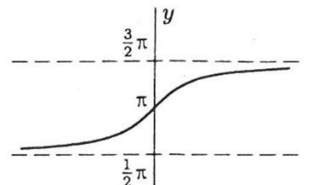
B.



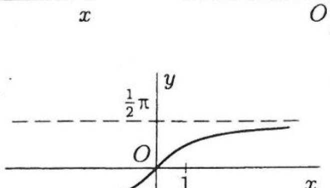
C.



D.



E.



řešení: D.

11 Goniometrické rovnice a nerovnice

1) Řešte v R rovnice:

a) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x = -3$

b) $\cos 2x = -0{,}5$

c) $2\sin\frac{x}{3} = \sqrt{3}$

d) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

e) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$

řešení: a) $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in Z$; b) $x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi, x_2 = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in Z$; c) $x_1 = \pi + 6k\pi, x_2 = 2\pi + 6k\pi, k \in Z$; d) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$; e) $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in Z$.

2) Řešte v R rovnice:

a) $2\sqrt{3}\,\mathrm{cotg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -2$

b) $\frac{5 + \sin x}{1 - \sin x} = 3$

c) $\mathrm{cotg}^2\, x = \sqrt{3}\,\mathrm{cotg}\, x$

d) $3\,\mathrm{tg}^2\, x = 1$

e) $4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0$

f) $(2\cos x + 1)\cdot\cos x = 1$

g) $\sin x + \frac{1}{\sin x} = 2$

řešení: a) $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in Z$; b) $x_1 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, x_2 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in Z$; c) $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi, x_2 = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z$; d) $x_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi, x_2 = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in Z$; e) $x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, x_2 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z$; f) $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x_2 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, x_3 = \pi + 2k\pi, k \in Z$; g) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$.

3) Řešte v R rovnice:

a) $3\sin^2 x = \cos^2 x$

b) $3\sin^2 x + \cos x + \cos^2 x = 0$

c) $\mathrm{tg}\, x - 3\,\mathrm{cotg}\, x = 0$

d) $\mathrm{tg}\, x - \mathrm{cotg}\, x - \frac{2}{\sqrt{3}} = 0$

e) $\sin^4 x - \cos^4 x = 0{,}5$

f) $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 1 - \cos 2x$

g) $\frac{1}{\sin^2 x} + \operatorname{cotg} x - 1 = 0$

řešení: a) $x_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi, x_2 = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in Z$; b) $x = \pi + 2k\pi, k \in Z$;
c) $x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi, x_2 = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in Z$; d) $x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}, k \in Z$;
e) $x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi, x_2 = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in Z$; f) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$;
g) $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi, x_2 = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in Z$.

4) Řešte v R rovnice:

a) $\sin 2x + \cos x = 0$

b) $\sin x - \cos 2x = 0$

c) $\sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$

d) $2\cos^2 x = \operatorname{cotg} x$

e) $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$

řešení: a) $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi, x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, x_3 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in Z$;
b) $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, x_3 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$;
c) $x_1 = \frac{\pi}{12} + k\pi, x_2 = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in Z$; d) $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi, x_2 = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$;
e) $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi, x_2 = \frac{\pi}{6} + k\pi, x_3 = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in Z$.

5) Řešte v R nerovnice:

a) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{1}{2}$

b) $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \geq \frac{1}{2}$

c) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \geq 1$

d) $\operatorname{cotg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 1$

řešení: a) $K = \bigcup_{k\in Z}\left\langle\frac{7\pi}{12} + 2k\pi, \frac{23\pi}{12} + 2k\pi\right\rangle$; b) $K = \bigcup_{k\in Z}\left\langle-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\rangle$;
c) $K = \bigcup_{k\in Z}\left\langle-\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right)$; d) $K = \bigcup_{k\in Z}\left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right\rangle$.

6) Řešte v $\langle 0, 2\pi \rangle$ nerovnice:

a) $\sin x \geq -\frac{1}{2}$

b) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 1 < 0$

c) $|\sin x| > \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\left|\cos x - \frac{1}{2}\right| < 1$

e) $\left|2\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right| > \frac{1}{\sqrt{2}}$

f) $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x - 3 < 0$

g) $\sin x - \sqrt{3}\cos x > 1$

h) $\cos 2x + 5\cos x + 3 \geq 0$

i) $\sin x + \cos 2x > 1$

j) $\cos 2x + \sin x < 0$

řešení: a) $K = \left\langle 0; \frac{7\pi}{6} \right\rangle \cup \left\langle \frac{11\pi}{6}; 2\pi \right\rangle$; b) $K = \left\langle 0; \frac{\pi}{6} \right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6} \right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi \right\rangle$;
c) $K = \left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right)$; d) $K = \left\langle 0; \frac{2\pi}{3} \right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}; 2\pi \right\rangle$;
e) $K = \left\langle 0; \frac{\pi}{4} \right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}; 2\pi \right\rangle$; f) $K = \left\langle 0; \frac{\pi}{3} \right) \cup \left(\frac{2\pi}{3}; 2\pi \right\rangle$;
g) $K = \left(\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6} \right)$; h) $K = \left\langle 0; \frac{2\pi}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{4\pi}{3}; 2\pi \right\rangle$;
i) $K = \left(0; \frac{\pi}{6} \right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}; \pi \right)$; j) $K = \left(\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right)$.

12 Sinová a kosinová věta, Pythagorova a Euklidovy věty

Pozn. V příkladech 1 a 2 zaokrouhlujte výsledky se stejnou přesností jako mají zadané hodnoty (tj. délky stran typicky s přesností na desetiny jednotky, velikosti úhlů na minuty).

1) Z daných prvků v pravoúhlém trojúhelníku ABC (s pravým úhlem při vrcholu C) vypočtěte další uvedené prvky:

   a) $b = 54{,}5$ cm; $\alpha = 49°50'$; a, c, β, v_c
   b) $a = 7{,}5$ cm; $v_c = 5$ cm; α, β, b, c
   c) $S = 17{,}4$ cm^2, $a = 5{,}42$ cm; b, c, α, β

řešení: a) $a \doteq 64{,}6$ cm; $c \doteq 84{,}5$ cm; $v_c \doteq 41{,}6$ cm; $\beta = 40°10'$;
b) $\alpha \doteq 48°11'$; $\beta \doteq 41°49'$; $b \doteq 6{,}7$ cm; $c \doteq 10{,}1$ cm;
c) $\alpha \doteq 40°10'$; $\beta \doteq 49°50'$; $b \doteq 6{,}42$ cm; $c \doteq 8{,}40$ cm.

2) Určete délky zbývajících stran a velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC, je-li dáno:

   a) $\alpha = 48°50'$, $\beta = 107°16'$, $c = 135{,}3$ m
   b) $a = 134{,}5$ m, $b = 111{,}2$ m, $\gamma = 54°12'$
   c) $a = 6{,}25$ cm, $b = 11{,}5$ cm, $c = 7{,}35$ cm
   d) $a = 746{,}4$ m, $b = 1\,854$ m, $\beta = 145°7'$
   e) $a = 13{,}6$ cm, $b = 22{,}5$ cm, $\alpha = 21°38'$
   f) $b = 6{,}5$ cm, $c = 3{,}5$ cm, $\gamma = 55°$
   g) $S = 131$ cm^2, $c = 31{,}7$ cm, $\beta = 37°35'$
   h) $S = 16\,000$ cm^2, $a = 250$ cm, $b = 320$ cm

řešení: a) $\gamma = 23°54'$; $a \doteq 251{,}4$ m; $b \doteq 318{,}9$ m; b) $\alpha \doteq 73°24'$; $\beta \doteq 52°24'$; $c \doteq 113{,}8$ m;
c) $\alpha \doteq 29°27'$; $\beta \doteq 115°14'$; $\gamma \doteq 35°19'$; d) $\alpha \doteq 13°19'$; $\gamma \doteq 21°34'$; $c \doteq 1\,191{,}9$ m;

e) $\beta_1 \doteq 37°35'$; $\gamma_1 \doteq 120°47'$; $c_1 \doteq 31{,}7$ cm; $\beta_2 \doteq 142°25'$; $\gamma_2 \doteq 15°57'$; $c_2 \doteq 10{,}1$ cm;
f) Takový trojúhelník neexistuje; g) $\alpha \doteq 21°38'$; $\gamma \doteq 120°47'$; $a \doteq 13{,}6$ cm; $b \doteq 22{,}5$ cm;
h) $\alpha_1 \doteq 47°48'$; $\beta_1 \doteq 108°37'$; $\gamma_1 \doteq 23°35'$; $c_1 \doteq 135$ cm;
$\alpha_2 \doteq 10°19'$; $\beta_2 \doteq 13°16'$; $\gamma_2 \doteq 156°25'$; $c_2 = 558$ cm.

3) Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC se předešlé úlohy (a-e).

řešení: a) S ≐ 16 240,9 m^2; b) S ≐ 6 065,3 m^2; c) S ≐ 20,78 cm^2;
d) S ≐ 254 394,8 m^2; e) $S_1 \doteq 131{,}4$ cm^2; $S_2 \doteq 42$ cm^2.

4) Graficky určete délku strany čtverce, který má stejný obsah jako daný obdélník.

postup: Užitím některé z Euklidových vět.

5) Sestrojte úsečky, které při zvolené jednotkové úsečce mají délky $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{19}$, $\sqrt{35}$.

postup: Užitím Pythagorovy věty či některé z Euklidových vět.
$\sqrt{10}$ je délkou přepony v pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami délek 1 a 3.
$\sqrt{13}$ je délkou přepony v pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami délek 2 a 3, nebo délkou odvěsny v pravoúhlém trojúhelníku se zbývajícími stranami délek 6 a 7. $\sqrt{19}$ je délkou odvěsny v pravoúhlém trojúhelníku se zbývajícími stranami délek 9 a 10. $\sqrt{35}$ je délkou odvěsny v pravoúhlém trojúhelníku se zbývajícími stranami délek 1 a 6.

6) Je dána úsečka délky a. Sestrojte úsečky, které mají délky $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{3}$, $\frac{a}{\sqrt{2}}$, $\frac{a}{\sqrt{5}}$.

postup: Užitím Pythagorovy věty (či některé z Euklidových vět) a stejnolehlosti.

7) K danému pravoúhlému trojúhelníku ABC s odvěsnami délek a, b sestrojte čtverec, který má stejný obsah.

postup: Užitím některé z Euklidových vět.

8) Vypočítejte délku tětivy v kružnici o poloměru 10 cm, jestliže tětiva dělí průměr k ní kolmý v poměru 2 : 3.

řešení: $8\sqrt{6}$ cm.

9) Dvě rovnoběžné tětivy v kružnici o poloměru 6 cm mají délky 6 cm a 10 cm. Určete jejich vzdálenost.

řešení: $3\sqrt{3} \pm \sqrt{11}$ cm (přibližně 1,9 cm nebo 8,5 cm).

10) V obdélníku ABCD se stranami $|AB| = a$, $|AD| = \frac{a}{2}$ je bodem A vedena kolmice na úhlopříčku BD, kterou protne v bodě P. Určete poměr $\frac{|BP|}{|DP|}$.

řešení: 4 : 1.

11) Dokažte, že v pravoúhlém trojúhelníku ABC je poměr délek obou úseků přepony c_a, c_b roven poměru druhých mocnin délek přilehlých odvěsen a, b.

řešení: Plyne přímo z Eukleidových vět o odvěsnách.

12) V pravoúhlém trojúhelníku ABC jsou dány délky těžnic $t_a = 17$ cm, $t_b = 15$ cm. Vypočítejte délky jeho odvěsen a, b a přepony c.

řešení: $a = \frac{2}{15}\sqrt{9165}$ cm $\doteq 12{,}76$ cm, $b = \frac{14}{15}\sqrt{285}$ cm $\doteq 15{,}76$ cm, $a = \frac{2}{5}\sqrt{2570}$ cm $\doteq 20{,}28$ cm.

13 Trojúhelníky (konstrukční úlohy, výpočty)

1) Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, je-li dáno:

   a) $c = 6$ cm, $a = 4{,}5$ cm, $\alpha = 45°$
   b) $c = 4$ cm, $v_a = 3$ cm, $t_a = 3{,}5$ cm
   c) $b = 8$ cm, $t_b = 2{,}5$ cm, $\gamma = 30°$
   d) $c = 5$ cm, $v_a = 4$ cm, $t_c = 3{,}5$ cm
   e) $c = 6$ cm, $a = 3$ cm, $t_b = 4$ cm
   f) $c = 5$ cm, $v_a = 4$ cm, $v_c = 3$ cm
   g) $c = 3$ cm, $a = 5$ cm, $t_a = 4{,}5$ cm
   h) $c = 3{,}5$ cm, $v_c = 3$ cm, $t_a = 2$ cm
   i) $c = 5$ cm, $t_a = 6$ cm, $t_b = 3$ cm
   j) $c = 6$ cm, $v_a = 3{,}5$ cm, $v_b = 5{,}5$ cm
   k) $c = 7$ cm, $t_b = 6$ cm, $t_c = 4{,}5$ cm
   l) $v_c = 4$ cm, $\alpha = 60°, \beta = 45°$
   m) $t_c = 4$ cm, $\alpha = 60°, \beta = 45°$
   n) $t_c = 4$ cm, $\alpha = 45°, \gamma = 60°$
   o) $c = 4$ cm, $v_c = 3$ cm, $t_c = 4{,}5$ cm
   p) $r = 4$ cm, $v_c = 2$ cm, $c = 7{,}5$ cm
   q) $r = 4$ cm, $t_c = 4{,}5$ cm, $c = 7{,}5$ cm
   r) $r = 4$ cm, $v_a = 3$ cm, $c = 7$ cm
   s) $r = 4$ cm, $v_a = 5$ cm, $\gamma = 45°$

2) Je možné sestrojit trojúhelník, jehož výšky měří 2 cm, 4 cm a 5 cm?

řešení: Nelze.

3) Vypočítejte úhly, které svírají výšky v rovnostranném trojúhelníku.

řešení: 60°.

4) Do rovnostranného trojúhelníku ABC o straně délky *a* je vepsán čtverec. Vypočítejte délku strany čtverce.

řešení: $x = a \cdot (2\sqrt{3} - 3)$.

5) Vypočítejte poloměr kružnice opsané a vepsané pravoúhlému trojúhelníku s odvěsnami délek 7,5 cm a 18 cm.

řešení: $r = 9{,}75$ cm, $\rho = 3$ cm.

14 Kruh, kružnice, úhly (konstrukční úlohy, výpočty)

1) Obvod kruhové výseče, která je částí kruhu o poloměru 12 cm, je 39 cm. Vypočítejte její obsah.

řešení: 90 cm^2.

2) Do kružnice o poloměru 6 cm je vepsán pravidelný šestiúhelník. Spočítejte obvod a obsah kruhové úseče, která je ohraničena stranou tohoto šestiúhelníku a obloukem dané kružnice.

řešení: $o = 6 + 2\pi$ cm $\doteq 12{,}28$ cm, $S = 6\pi - 9\sqrt{3}$ cm^2 $\doteq$ $3{,}26$ cm^2.

3) Mějme čtverec ABCD o délce strany a. Spočtěte obsah a obvod mezikruží, ohraničeného kružnicí opsanou a vepsanou danému čtverci.

řešení: $o = (\sqrt{2} + 1)\pi a$, $S = \frac{\pi a^2}{4}$.

4) Mějme čtverec ABCD o straně |AB| = a a čtyři kružnice o poloměru $\frac{a}{2}$ se středy v bodech S_{AB}, S_{BC}, S_{CD}, S_{AD}. Spočtěte obvod a obsah plochy, která je průnikem alespoň dvou takto vzniklých kruhů („čtyřlístek“).

řešení: $o = 2\pi a$, $S = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) a^2$.

5) Mějme rovnostranný trojúhelník ABC o straně |AB| = a a tři kruhy se středy v bodech A, B, C a poloměry $r = a$. Spočtěte obvod a obsah jejich průniku („oblouky gotického okna“).

řešení: $o = \pi a$, $S = \frac{a^2}{2}(\pi - \sqrt{3})$.

6) Je dána kružnice l (O; 3 cm) a její tečna t. Sestrojte všechny kružnice, které mají poloměr 1 cm, dotýkají se přímky t a s kružnicí l mají vnější dotyk.

7) Jsou dány soustředné kružnice k_1(O; 5 cm), k_2(O; 2 cm) a přímka p, pro kterou platí $|Op|$ = 3 cm. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají kružnic k_1, k_2 a přímky p.

8) Jsou dány soustředné kružnice k_1(O; 5 cm), k_2(O; 2 cm) a bod M, pro který platí |OM| = 4 cm. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají kružnic k_1, k_2 a prochází bodem M.

9) Do kružnice je vepsán čtyřúhelník ABCD tak, že jeho vrcholy dělí kružnici v poměru 1 : 2 : 3 : 4. Vypočítejte velikosti jeho vnitřních úhlů.

řešení: 90°, 126°, 90°, 54°.

10) Dokažte, že spojnice bodů, kterou na ciferníku vyznačují 3 a 6 je kolmá na spojnici 4 a 11.

postup: Užitím věty o středovém a obvodovém úhlu.

11) Kruhová výseč má obvod 17 cm, obsah 17,5 cm^2. Určete její poloměr a velikost příslušného středového úhlu.

řešení: $r_1 = 5$ cm, $\omega_1 \doteq 80°12'51''$ nebo $r_2 = 3{,}5$ cm, $\omega_2 \doteq 163°42'8''$.

15 Mnohoúhelníky (konstrukční úlohy, výpočty)

1) Sestrojte kosočtverec ABCD, je-li dáno:
   a) v = 3 cm, e = 2v
   b) f = 4 cm, ρ = 1,5 cm kde ρ je poloměr vepsané kružnice

2) Sestrojte kosodélník ABCD, pro který platí:
   a) a = 4 cm, $\alpha = 60°$, e = 5,5 cm
   b) e = 5 cm, f = 3 cm, v_a = 2,5 cm

3) Sestrojte lichoběžník ABCD (AB || CD), pro který platí:
   a) b = 4 cm, v = 3,5 cm, e = 8 cm, f = 7 cm
   b) b = 4 cm, c = 2 cm, $\alpha = 60°$, f = 5 cm

4) Sestrojte čtyřúhelník ABCD, pro který platí:
   a) je tětivový, a = 5 cm, $\beta = 120°$, e = 7 cm, f = 8 cm
   b) je tečnový, a = 7,5 cm, b = 3,5 cm, $\alpha = 45°$, ρ = 2 cm

5) Je dán kružnicový oblouk $\widehat{AB}$. Určete (konstrukčně) střed kružnice, jejíž je oblouk součástí.

6) Je dána kružnice k (S; r). Vepište do ní pravidelný dvanáctiúhelník.

7) Určete poloměr kružnice opsané pravidelnému pětiúhelníku, je-li délka jeho strany 10 cm.

řešení: $r \doteq 8{,}51$ cm.

8) Určete počet úhlopříček v n-úhelníku pro n = 5, 6, 8, 12.

řešení: 5, 9, 20, 54.

9) Který konvexní n-úhelník má úhlopříček o 102 více než stran?

řešení: $n = 17$.

10) V kterém konvexním n-úhelníku je počet úhlopříček 3,5krát větší než počet stran?

řešení: $n = 10$.

11) Kolik vrcholů má pravidelný n-úhelník, jehož všechny vnitřní úhly mají velikost 144°.

řešení: $n = 10$.

12) V pravidelném osmiúhelníku ABCDEFGH spočtěte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníků ACE, ABC a ADE.

řešení: 45°, 90°, 45°; 22°30’, 135°, 22°30’; 22°30’, 90°, 67°30’.

13) Vypočítejte obvod a obsah pravidelného pětiúhelníku, který je vepsán do kružnice o poloměru r = 6 cm.

řešení: $o \doteq 35{,}27$ cm; $S \doteq 85{,}60$ cm^2.

14) Vypočítejte obvod a obsah pravidelného pětiúhelníku, kterému je vepsána kružnice o poloměru ρ = 6 cm.

řešení: $o \doteq 43{,}59$ cm; $S \doteq 130{,}78$ cm^2.

15) Strana pravidelného devítiúhelníku je 5 cm. Vypočítejte poloměr kružnice, kterou lze danému devítiúhelníku opsat.

řešení: $r \doteq 7{,}31$ cm.

16) Strana pravidelného devítiúhelníku je 5 cm. Vypočítejte poloměr kružnice, kterou lze danému devítiúhelníku vepsat.

řešení: $\rho \doteq 6{,}87$ cm.

17) Vypočítejte délku strany pravidelného sedmiúhelníku, je-li dána délka jeho nejkratší úhlopříčky u = 20 cm.

řešení: $a \doteq 11{,}10$ cm.

18) Pravidelný šestiúhelník ABCDEF se středem S definujte jako průnik co nejmenšího počtu: a) polorovin, b) úhlů.

19) Dokažte, že v pravidelném dvanáctiúhelníku je velikost vnitřního úhlu rovna pětinásobku velikosti vnějšího úhlu.

20) Dokažte, že součet velikostí vnějších úhlů konvexního n-úhelníku je 360° (budeme-li do něj započítávat u každého z vrcholů právě jeden z dvojice vnějších úhlů).

21) Narýsujte šestiúhelník, který není pravidelný, ale je středově souměrný podle průsečíku úhlopříček spojující protější vrcholy.

22) Vypočtěte obsah pravidelného šestiúhelníku, jeli dán rozdíl poloměrů kružnice šestiúhelníku opsané a vepsané x.

řešení: $(72 + 42\sqrt{3})x^2$.

23) Je dán pravidelný pětiúhelník ABCDE. Vypočtěte základní velikosti orientovaných úhlů AED, CAB

řešení: 108°; –36°.

24) Delší základna rovnoramenného lichoběžníku měří 12 cm a je zároveň průměrem kružnice opsané tomuto lichoběžníku. Délka úhlopříčky měří 10,6 cm. Vypočítejte výšku tohoto lichoběžníku.

řešení: $v \doteq 4{,}97$ cm.

25) Výška a základny lichoběžníku jsou v poměru 2 : 3 : 5, jeho obsah je 512 cm^2. Vypočítejte jeho výšku a délky obou základen.

řešení: v = 16 cm; a = 24 cm; c = 40 cm.

26) Určete délku stran obdélníku, je-li jeho obvod 38 cm a obsah 84cm^2.

řešení: 7 cm; 12 cm.

16 Shodná a podobná zobrazení v rovině

1) Mějme dány dvě různoběžky p, q a bod S, který na nich neleží. Sestrojte čtverec ABCD tak, aby $\mathrm{A} \in p, \mathrm{C} \in q$ a bod S byl středem tohoto čtverce.

postup: Užitím středové souměrnosti se středem S.

2) Mějme dány dvě rovnoběžky p, q ($p \neq q$) a bod S, který na nich neleží. Sestrojte pravidelný šestiúhelník ABCDEF tak, aby $\mathrm{A} \in p, \mathrm{C} \in q$ a bod S byl středem tohoto šestiúhelníku.

postup: Užitím otočení o 120° se středem S.

3) Mějme dán rovnostranný trojúhelník ABC a bod Z jako vnitřní bod tohoto trojúhelníku. Sestrojte trojúhelník XYZ tak, aby X ∈ AB, Y ∈ BC a trojúhelník XYZ měl nejmenší obvod (z takových možných trojúhelníků XYZ).

postup: Užitím osových souměrností s osami $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$.

4) Mějme obdélník ABCD (|AB| = 3 cm, |AC| = 5 cm). Sestrojte obraz trojúhelníku ACD ve stejnolehlosti se středem v bodě B a koeficientem $\kappa = -\frac{1}{2}$.

5) Do pravoúhlého trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C (|AC| = 4 cm, |BC| = 3 cm) vepište čtverec KLMN tak, aby $\mathrm{K} \in \mathrm{AC}, \mathrm{N} \in \mathrm{BC}$ a $\mathrm{L}, \mathrm{M} \in \mathrm{AB}$.

postup: Užitím stejnolehlosti např. se středem A.

6) Mějme dány dvě různoběžky p, q a bod T, který na nich neleží. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby $\mathrm{A}_1 \in p, \mathrm{A} \in q$, bod T byl těžištěm tohoto trojúhelníku a úsečka AA_1 jeho těžnicí.

postup: Užitím stejnolehlosti se středem S a koeficientem –2.

7) Jsou dány dvě různoběžky *a*, *b*. Uvnitř jednoho jejich úhlu je dán bod M. Sestrojte kružnici, která prochází bodem M a dotýká se přímek *a*, *b*.

postup: Užitím stejnolehlosti se středem v průsečíku přímek *a*, *b*.

8) Sestrojte rovnoběžník ABCD, je-li dáno: a = 4 cm, e = 8 cm, f = 7 cm. Ve stejnolehlosti $H(\mathrm{S}, \kappa = -\frac{1}{2})$ sestrojte obraz rovnoběžníku ABCD. Bod S nenáleží rovnoběžníku ABCD.

9) Sestrojte trojúhelník ABC je-li dáno: c = 6 cm, a = 5 cm, γ = 60°. Sestrojte obraz trojúhelníku ABC v otočení $R(\mathrm{T}, \varphi = -30°)$. Bod T je těžiště trojúhelníku ABC.

10) Je dán tupoúhlý trojúhelník ABC. Určete jeho obraz v posunutí $T(\overrightarrow{\mathrm{AO}})$, kde O je průsečík výšek.

11) Jsou dány tři různé rovnoběžky *a*, *b*, *c*. Na přímce *a* je dán bod A. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, bod B ležel na přímce *b* a bod C na přímce *c*.

postup: Užitím otočení o 60° se středem A.

12) Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, v nichž |AC| : |BC| = 5 : 4, γ = 60°, v_c = 5 cm.

postup: Užitím stejnolehlosti se středem C.

13) Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, znáte-li $a : b : c = 4 : 3 : 5$, $r = 4$ cm.

postup: Užitím stejnolehlosti se středem ve středu strany *c*.

14) Určete všechna shodná zobrazení, v nichž je čtverec ABCD samodružný.

řešení: $O(\overleftrightarrow{AC})$, $O(\overleftrightarrow{BD})$, $O(o_{AB})$, $O(o_{BC})$, $S(S)$, $R(S, \pm 90°)$, identita.

15) Je dána úsečka CC_1, $|CC_1| = 3$ cm. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které je úsečka CC_1 těžnicí t_c a pro které dále platí $a = 3{,}5$ cm, $b = 5$ cm.

postup: Užitím středové souměrnosti se středem C_1.

16) Je dána úsečka CC_1, $|CC_1| = 3$ cm. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které je úsečka CC_1 těžnicí t_c a pro které dále platí $b = 8$ cm, $\beta = 30°$.

postup: Užitím středové souměrnosti se středem C_1.

17) Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, znáte-li: $a + b = 10$ cm, $c = 5$ cm, $v_a = 3$ cm.

postup: Užitím osové souměrnosti.

18) Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, znáte-li: $a + b + c = 12$ cm, $v_c = 3$ cm, $\gamma = 60°$.

postup: Užitím osové souměrnosti.

19) Narýsujte společné tečny daných dvou kružnic:
$k_1 (O_1; 3{,}5 \text{ cm})$, $k_2 (O_2; 1{,}5 \text{ cm})$, $|O_1O_2| = 6{,}5$ cm

postup: Užitím stejnolehlosti se středem ve středu strany *c*.

17 Tělesa (polohové a metrické vztahy, řezy)

1) Je dána krychle ABCDEFGH. Označte K, L, M, N, O, P po řadě středy hran AB, CD, EF, GH, FG, FB. Určete vzájemnou polohu:
   a) rovin EKL, MNC a MOP, DBH
   b) přímek OP, CG a FN, BL
   c) přímky a roviny DM, ABF a MN, ADF.

řešení: a) rovnoběžné, různoběžné; b) různoběžné, rovnoběžné; c) různoběžné, rovnoběžné.

2) Je dána krychle ABCDEFGH. Určete všechny přímky, které procházejí bodem E a některým dalším vrcholem krychle a s přímkou BC jsou:
   a) rovnoběžné
   b) různoběžné
   c) mimoběžné.

řešení: a) EH; b) EB, EC; c) EF, ED, EA, EG.

3) Je dána krychle ABCDEFGH. Určete všechny přímky, které procházejí bodem H a některým dalším vrcholem krychle a s rovinou ABC jsou:
   a) rovnoběžné
   b) různoběžné.

řešení: a) HE, HF, HG; b) HA, HB, HC, HD.

4) Je dána krychle ABCDEFGH. Rozhodněte o vzájemné poloze rovin určených body (jsou-li různoběžné, určete jejich průsečnici):
   a) ABC, EFH
   b) ABC, BCD
   c) ADH, BCE
   d) ACE, BDF.

řešení: řešení: a) rovnoběžné; b) totožné; c) různoběžné, průsečnicí je přímka EH; d) různoběžné, průsečnicí je přímka procházející středy stěn ABCD a EFGH.

5) Sestrojte řez krychle ABCDEFGH rovinou KBL, bod K je středem hrany AE, bod L je bodem hrany EH, $|\mathrm{LH}| = \frac{1}{4}|\mathrm{EH}|$.

6) Sestrojte řez krychle ABCDEFGH rovinou XZY, bod X je středem hrany CG, bod Y je bodem hrany HG, $|\mathrm{HY}| = \frac{1}{4}|\mathrm{HG}|$, bod Z je bodem hrany AB, $|\mathrm{BZ}| = \frac{1}{4}|\mathrm{AB}|$.

7) Sestrojte řez krychle ABCDEFGH rovinou AHL, bod L je středem hrany CG.

8) Sestrojte řez krychle ABCDEFGH rovinou XYZ, bod X je bodem hrany EF, $|\mathrm{XF}| = \frac{1}{4}|\mathrm{EF}|$, bod Y je středem hrany FG, bod Z je bodem hrany AE, $|\mathrm{AZ}| = \frac{1}{4}|\mathrm{AE}|$.

9) Sestrojte řez krychle ABCDEFGH rovinou XYZ, bod X je středem hrany AB, bod Y je středem hrany AE, bod Z leží na hraně CG, přitom $|\mathrm{CZ}| : |\mathrm{ZG}| = 2 : 1$.

10) Je dán kvádr ABCDEFGH se čtvercovou podstavou a přímka $p = \leftrightarrow$ PQ. Bod P je bodem polopřímky DC, $|\mathrm{DP}| = \frac{4}{3}|\mathrm{CD}|$, bod Q je bodem polopřímky FE, $|\mathrm{FQ}| = \frac{3}{2}|\mathrm{EF}|$. Sestrojte průsečíky přímky p s povrchem kvádru.

11) Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu ABCDV rovinou KLM, kde $\mathrm{K} \in \mathrm{AB}$ a $|\mathrm{BK}| = 3|\mathrm{AK}|$; $\mathrm{L} \in \mathrm{CD}$ a $|\mathrm{DL}| = 3|\mathrm{CL}|$; $\mathrm{M} \in \mathrm{DV}$ a $|\mathrm{DM}| = 2|\mathrm{MV}|$.

12) Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu ABCDV rovinou XYZ, kde $\mathrm{X} = \mathrm{S}_{\mathrm{AD}}$; $\mathrm{Y} \in \mathrm{CD}$ a $|\mathrm{DY}| = 3|\mathrm{CY}|$; $\mathrm{Z} \in \mathrm{BV}$ a $|\mathrm{BZ}| = 3|\mathrm{VZ}|$.

13) Je dán kvádr ABCDEFGH: |AB| = 6 cm, |BC| = 4 cm, |AE| = 7 cm. Vypočítejte odchylku přímek DG, BG.

řešení: Asi 48°45´.

14) Je dán kvádr ABCDEFGH: |AB| = 6 cm, |BC| = 4 cm, |AE| = 7 cm. Vypočítejte odchylku přímky AS a roviny ADE. Bod S je střed horní podstavy.

řešení: Asi 22°24´.

15) Je dán kvádr ABCDEFGH: |AB| = 6 cm, |BC| = 4 cm, |AE| = 7 cm. Vypočítejte vzdálenost bodu B od roviny ACE.

řešení: $\frac{12}{13}\sqrt{13}$ cm $\doteq 3{,}33$ cm.

16) Je dán pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV, jehož stěny jsou rovnostranné trojúhelníky. Bod S je středem jeho podstavy. Určete odchylku přímek:
   a) BC a SV   b) AB a CV.

řešení: a) 90°, b) 60°.

17) Je dána krychle ABCDEFGH. Určete odchylku přímky $p = \leftrightarrow XY$ (X je středem hrany EH a bod Y je bodem hrany BF, $|BY| : |YF| = 1:3$) a roviny ABC.

řešení: Asi 33°51´.

18) Je dána krychle ABCDEFGH s hranou délky a. Vypočtěte vzdálenost bodu A od přímky:
a) DH b) FG c) FH.

řešení: a) a; b) $\sqrt{2}a$; c) $\frac{\sqrt{6}}{2}a$

19) Je dán kvádr ABCDEFGH: |AB| = 6 cm, |BC| = 4 cm, |AE| = 8 cm. Vypočítejte vzdálenost:
a) bodů A, G
b) bodu F od přímky EG.

řešení: a) $2\sqrt{29}$ cm; b) $\frac{12\sqrt{13}}{13}$ cm.

20) Je dán kvádr ABCDEFGH: |AB| = 6 cm, |BC| = 4 cm, |AE| = 8 cm. Vypočítejte odchylku:
a) přímek BG, FC
b) přímky EC od roviny ABC.

řešení: a) Asi 53°8´; b) Asi 47°58´.

18 Mnohostěny

1) Je dána krychle ABCDEFGH o velikosti hrany a. Určete povrch a objem tělesa ACHF.

řešení: $S = 2\sqrt{3}a^2$; $V = \frac{a^3}{3}$.

2) Délky stěnových úhlopříček kvádru jsou v poměru $\sqrt{10} : \sqrt{17} : 5$. Určete rozměry tohoto kvádru, je-li jeho objem 96 cm^3.

řešení: 2 cm, 6 cm a 8 cm.

3) Určete objem a povrch pravidelného osmistěnu vepsaného kouli o poloměru r.

řešení: $S = 4\sqrt{3}r^2$; $V = \frac{4}{3}r^3$.

4) Pro rozměry kvádru a, b, c platí $a : b : c = 3 : 1 : 2$. Velikost tělesové úhlopříčky je rovna 28 cm. Určete povrch a objem kvádru.

řešení: $S = 1232$ cm^2; $V = 672\sqrt{14}$ cm^3.

5) Každými třemi středy hran krychle, jež vycházejí z jednoho jejího vrcholu, je určena rovina, která odděluje z krychle trojboký jehlan. Pokuste se načrtnout těleso, které vznikne po oddělení všech „rohů“ a určete jeho povrch (délka hrany krychle je a).

řešení: $S = \left(3 + \sqrt{3}\right)a^2$.

6) Určete povrch a objem pravidelného čtyřstěnu o hraně délky 10 cm.

řešení: $S = 100\sqrt{3}$ cm^2; $V = \frac{250}{3}\sqrt{2}$ cm^3.

7) Vypočtěte objem pravidelného čtyřbokého jehlanu, jehož pobočná hrana AV o délce 8,5 cm svírá s podstavou úhel o velikosti 30°.

řešení: $V \doteq 153{,}53\ \mathrm{cm}^3$.

8) Pravidelný čtyřboký komolý jehlan má podstavné hrany o délkách $8\sqrt{3}$ dm a $6\sqrt{3}$ dm. Pobočná stěna svírá s podstavou úhel 60°. Určete povrch a objem komolého jehlanu.

řešení: $S = 468\ \mathrm{dm}^2$; $V = 444\ \mathrm{dm}^3$.

19 Rotační tělesa

1) Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu C, kde a je délka strany BC, b délka AC a c délka AB. Vypočtěte poměr objemů tří těles, která vzniknou rotací tohoto trojúhelníka postupně kolem každé jeho strany.

řešení: $V_a : V_b : V_c = bc : ac : ab$

2) Do koule o poloměru x je vepsán rovnostranný válec a rovnostranný kužel. Určete poměr povrchů a objemů těchto tří těles.

řešení: $S_1 : S_2 : S_3 = 16 : 12 : 9$; $V_1 : V_2 : V_3 = 32 : 12\sqrt{2} : 9$.

3) Nádoba tvaru polokoule je zcela naplněna vodou.
   a) Nakloníme-li ji o úhel 30°, vyteče z ní jisté množství vody. Kolik procent obsahu plochy vnitřku nádoby bude smáčet zbývající voda?
   b) Nakloníme-li ji o úhel 30°, vyteče z ní 11 litrů vody. Kolik litrů v ní zůstane?

řešení: a) 50 %; b) 5 litrů.

4) Nálevka má tvar rovnostranného kužele. Stanovte obsah plochy smáčené vodou, jsou-li v nálevce právě tři litry vody.

řešení: $6\sqrt[3]{\pi}$ dm².

5) Půdorysem výklenku románského kostela je půlkruh s průměrem 6 m. Výklenek je překlenut klenbou, která je čtvrtinou kulové plochy. Výška obvodových zdí je 7,58 m.
   a) Jak velký je obestavěný prostor výklenku?
   b) Jak velký je povrch stěny a klenby?

řešení: a) $43{,}11\pi\ \mathrm{m}^3 \doteq 135{,}43\ \mathrm{m}^3$; b) $31{,}74\pi\ \mathrm{m}^2 \doteq 99{,}71\ \mathrm{m}^2$.

6) Určete velikost středového úhlu v rozvinutém plášti rovnostranného kužele.

řešení: 180°.

7) Rotační válec má povrch 20π dm². Úhlopříčka osového řezu má délku 5 dm. Určete objem válce.

řešení: 12π dm³ nebo $5\sqrt{5}\pi$ dm³.

8) Vypočtěte povrch tělesa, které vznikne rotací rovnostranného trojúhelníka ABC okolo jeho strany délky a.

řešení: $\sqrt{3}\pi\ a^2$.

9) Rotační komolý kužel má poloměry podstav 4 dm a 3 dm. Jeho objem je 148 π dm^3. Určete jeho povrch.

řešení: $(25 + 7\sqrt{145})\pi$ dm^2.

10) Ze tří kovových koulí o poloměrech 3 cm, 4 cm a 5 cm byla zhotovena (slita) jediná koule. Určete její povrch.

řešení: 144π cm^2.

20 Vektory a operace s nimi

1) Ve zvolené soustavě souřadnic mají body A, B, C souřadnice A[2; 1]; B[–1; 1]; C[3; 1]. Určete souřadnice bodu D tak, aby orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ byly umístěním téhož vektoru.

řešení: D[0; 1].

2) Vypočtěte skalární součin vektorů:
   a) $\vec{u} = (3;\ -1; 2);\ \vec{v} = (0; 4; 6)$
   b) $|\vec{u}| = 5;\ |\vec{v}| = 2; \beta = 45°$ (β značí úhel vektorů $\vec{u}, \vec{v}$)

řešení: a) 8; b) $5\sqrt{2}$.

3) Určete souřadnice vrcholu D rovnoběžníku ABCD, kde A[4; 7], B[2; 8], C[–1; 4].

řešení: D[1; 3] .

4) Určete souřadnice a_1 vektoru $\vec{a} = (a_1; 7; -4)$ tak, aby vektory $\vec{a}, \vec{b}$ byly kolmé, jestliže platí $\vec{b} = (-2; 3; 6)$.

řešení: $a_1 = -1{,}5$.

5) Vypočítejte vektorový součin vektorů $\vec{u}, \vec{v}$, je-li $\vec{u} = (1; 2; 3)$, $\vec{v} = (2; -1; 4)$.

řešení: $\vec{u} \times \vec{v} = (11; 2; -5)$.

6) Jsou dány vektory $\vec{a} = (2; 3; -1)$, $\vec{b} = (1; -2; 3)$, $\vec{c} = (2; -1; 1)$. Určete souřadnice vektoru $\vec{x}$, který je kolmý k vektorům $\vec{a}$, $\vec{b}$ a jehož skalární součin s vektorem $\vec{c}$ je roven –6.

řešení: $\vec{x} = (-3; 3; 3)$.

7) Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC, je-li A[0; 2 ; 6], B[4; 0; 0], C[8; –2; 1].

řešení: $7\sqrt{5}$.

8) Zjistěte, zda vektor $\vec{u} = (1; 1; 2)$ je lineární kombinací vektorů $\vec{a} = (-1; 0; 1)$ a $\vec{b} = (2; 2; 3)$.

řešení: Není.

9) Jsou dány body A[1; 3; –2], B[3; –2; 5], C[0; 1; 7], D[8; 0; 3].
a) Vypočtěte obsahy všech stěn čtyřstěnu ABCD.
b) Vypočítejte objem čtyřstěnu ABCD.
c) Vypočítejte směrové vektory přímek, v nichž leží výšky čtyřstěnu.

řešení: a) $S_{ABC} \doteq 20{,}41$; $S_{ABD} \doteq 24{,}38$; $S_{ACD} \doteq 36{,}06$; $S_{BCD} \doteq 11{,}80$; b) $V \doteq 31{,}17$; c) $\vec{v}_{ABC} = (31;\ 25;\ 9)$; $\vec{v}_{ABD} = (-4;\ 39;\ 29)$; $\vec{v}_{ACD} = (1;\ 4;\ 1)$; $\vec{v}_{BCD} = (10;\ -4;\ 21)$.

10) Je dán rovnoběžník ABCD. Nechť E je střed jeho strany BC, F střed strany AD a M průsečík přímek AE a BF. Dokažte, že vektory B – A, C – B a M – A jsou lineárně závislé a vyjádřete některý z nich jako lineární kombinaci ostatních.

řešení: C – B = 4(M – A) – 2(B – A).

11) Jsou dány body A[0; 1], B[1,5; –2], C[–2; 5], D[2; 7]. Dokažte, že vektory B – A a D – C jsou k sobě kolmé.

řešení: Platí, že jejich skalární součin je roven 0.

12) Je dán vektor $\vec{u} = (3; 5)$. Určete vektor $\vec{v}$, který je k vektoru $\vec{u}$ kolmý a má velikost rovnu 68.

řešení: $\vec{v} = (-10\sqrt{34}; 6\sqrt{34})$; $\vec{v}\,' = (10\sqrt{34}; -6\sqrt{34})$.

13) Vypočtěte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, A[1; 2], B[3; 5], C$[1+\sqrt{3}; 2-2\sqrt{3}\,]$.

řešení: $\alpha = 90°, \beta = 60°, \gamma = 30°$.

21 Analytická geometrie – přímka v rovině a v prostoru, rovina v prostoru

1) Napište rovnici přímky q, která prochází bodem A[6; 1] tak, že má od přímky $p: 3x - \sqrt{3}y - 7 = 0$ odchylku β = 30°.

řešení: $q: x - 6 = 0$, $q': x - \sqrt{3}y - 6 + \sqrt{3} = 0$.

2) Napište rovnici přímky *p* procházející bodem A[1; 2] a svírající s osou *x* úhel β = 60°.

řešení: $p: \sqrt{3}x + y - 2 - \sqrt{3} = 0$, $p': -\sqrt{3}x + y - 2 + \sqrt{3} = 0$.

3) Najděte bod P' souměrně sdružený s bodem P[8; –9] podle přímky *p*, která prochází body A[3; –4] a B[–1; –2].

řešení: P`[10; –5].

4) Napište rovnici přímky *k*, která prochází průsečíkem přímek p_1, p_2 daných rovnicemi $4x - 3y = 0, x + 3y - 20 = 0$ a je kolmá k přímce *q* dané rovnicí $x - 2y + 4 = 0$.

řešení: $2x + y - \frac{40}{3} = 0$.

5) Dokažte, že body A[–4; –2], B[3; –5], C[0; 6] jsou vrcholy trojúhelníka.

postup: Stačí dokázat, že A, B, C neleží v přímce.

6) Jsou dány body A[–1; 0], B[1; 4]. Zjistěte, zda polopřímka $x = 3 - 2s, y = 1 + s, s \geq 0$ protíná polopřímku AB.

řešení: Ano.

7) Napište rovnici přímky, která prochází bodem A[5; 3] kolmo k přímce určené body C[4; 7], D[–4; –5].

řešení: $2x + 3y - 19 = 0$.

8) Napište rovnici přímky p, která prochází bodem A[2; 3] a má od bodu B[0; –1] vzdálenost $v = 4$.

řešení: $p: y - 3 = 0$, $p': 4x + 3y - 17 = 0$.

9) V trojúhelníku ABC znáte vrcholy A[–6; 2] a B[2; –2] a průsečík výšek V[1; 2]. Určete souřadnice vrcholu C.

řešení: C[2; 4].

10) Napište obecné rovnice přímek, na nichž leží strany trojúhelníku, jestliže znáte souřadnice jednoho vrcholu A[3; –4] a rovnice přímek, na nichž leží dvě jeho výšky $p: 7x - 2y - 1 = 0, q: 2x - 7y - 6 = 0$.

řešení: $a: x - y + 2 = 0$, $b: 2x + 7y + 22 = 0$, $c: 7x + 2y - 13 = 0$.

11) Zobrazte v soustavě O_{xy} množinu všech bodů A[x, y], pro jejichž souřadnice x, y platí:
a) $x + |x| = y + |y|$,
b) $|x| + |2y| = 4$.

12) Určete odchylku přímek AB a p, je-li dáno: A[1; 0; 5], B[2; 1; 6]; $p: x = 1 - t, y = 2 + t, z = 3 - t$.

řešení: $\varphi \doteq 70°32`$.

13) Určete vzájemnou polohu přímek p a q, je-li:

p: $x = 3 + 2t$, $y = -1 + 3t$, $z = 1 - t$; $t \in R$

q: $x = -2 + s$, $y = 5 + 3s$, $z = 2 - 3s$; $s \in R$

řešení: Jsou mimoběžné.

14) Určete vzájemnou polohu přímky p a roviny β (v případě různoběžnosti nalezněte souřadnice průsečíku).

p: $x = 3 - t$, $y = 2 + t$, $z = -1 + 3t$; $t \in R$

β: $x = 2 + r - s$, $y = 3 - 2r + 5s$, $z = 5 - 3r + 4s$; $r, s \in R$

řešení: Jsou různoběžné, průsečík X[–7; 12; 29].

15) Spočtěte vzdálenost bodu A[3; 2; –1] od roviny $\propto: 2x - y + z + 7 = 0$.

řešení: $\frac{5\sqrt{6}}{3}$.

16) Určete vzdálenost bodu M[1; 9; 5] od přímky AB: A[1; 2; 4], B[0; 5; 5].

řešení: $\sqrt{6}$.

17) Jsou dány body $M_1[0; -1; 3]$ a $M_2[1; 3; 5]$. Napište rovnici roviny procházející bodem M_2 a kolmé k přímce M_1M_2.

řešení: $x + 4y + 2z - 23 = 0$.

18) Napište rovnici roviny procházející bodem C[–1; –1; 2] a kolmé k rovinám $\alpha: x - 2y + z - 4 = 0, \beta: x + 2y - 2z + 4 = 0$.

řešení: $2x + 3y + 4z - 3 = 0$.

19) Napište rovnici roviny rovnoběžné s osou *y* a procházející body A[0; 1; 3], B[2; 4; 5].

řešení: $x - z + 3 = 0$.

22 Analytická geometrie – kružnice, elipsa

1) Určete střed a poloměr kružnice:
   a) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 23 = 0$,
   b) $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 11 = 0$.

řešení: a) S[3; –2]; $r = 6$; b) S[–1; –2]; $r = 4$.

2) Napište rovnici kružnice procházející body:
   a) A[3; 0], B[–1; 2], jejíž střed S leží na přímce $p: x - y + 2 = 0$,
   b) A[5; 3]; B[6; 2], jejíž střed S leží na přímce $p: 3x - 4y - 3 = 0$.

řešení: a) $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$, b) $x^2 + y^2 - 18x - 12y + 92 = 0$.

3) Vypočítejte vzdálenost bodu A[8; 1] od středu kružnice dané rovnicí $x^2 + y^2 - 4x + 14y + 48 = 0$.

řešení: $d = 10$.

4) Urči rovnici kružnice opsané trojúhelníku ABC, kde:
   a) A[2; 1], B[1; 4], C[6; 9],
   b) A[6; 9], B[7; 8], C[0; 1].

řešení: a) $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 27 = 0$, b) $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$.

5) Je dána kružnice $k: x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$, určete její střed a poloměr r. Najděte rovnici tečny v daném bodě C[–1; 2].

řešení: S[3; 5], $r = 5$; $t: 4x + 3y - 2 = 0$.

6) Napište rovnici kružnice, která prochází počátkem soustavy souřadnic, bodem A[2; 4] a má střed na ose *x*.

řešení: $x^2 + y^2 - 10x = 0$.

7) Určete vzájemnou polohu přímky p a kružnice k, jestliže $p: x - 2y - 1 = 0, k: x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$.

řešení: tečna s bodem dotyku T[3; 1].

8) Vypočtěte délku tětivy, kterou vytne kružnice $k: x^2 + y^2 = 17$ na přímce $p: x - y - 3 = 0$.

řešení: $5\sqrt{2}$.

9) Napište obecnou rovnici přímky, která prochází středy kružnic $k_1: x^2 + y^2 + 14x - 16y + 77 = 0$ a $k_2: x^2 + y^2 + 18x - 14y + 66 = 0$.

řešení: $x - 2y + 23 = 0$.

10) Je dána kružnice $k: x^2 + y^2 = 10$ a přímka $p: x - 2y + 5 = 0$. Napište rovnice tečen kružnice *k*, které procházejí jejími průsečíky s přímkou *p*.

řešení: $t_1 = x + 3y - 10 = 0, t_2 = 3x - y + 10 = 0$.

11) Určete střed a délku poloos u elipsy dané rovnicí $\varepsilon: 9x^2 + 16y^2 + 36x - 32y - 92 = 0$. Určete souřadnice ohnisek.

řešení: $\mathrm{S}[-2; 1]$; $a = 4$; $b = 3$; $\mathrm{E}[-2 - \sqrt{7}; 1]$; $\mathrm{F}[-2 + \sqrt{7}; 1]$.

12) Zjistěte, zda daná rovnice je rovnicí elipsy, a je-li tomu tak, najděte její střed, ohniska a poloosy:
   a) $x^2 + 4y^2 + 4x - 21 = 0$,
   b) $9x^2 + 25y^2 - 54x - 100y - 44 = 0$.

řešení: a) $\mathrm{S}[-2; 0]$; $a = 5$; $b = 2{,}5$; $e = 2{,}5\sqrt{3}$; $\mathrm{E}[-2 - 2{,}5\sqrt{3}; 0]$; $\mathrm{F}[-2 + 2{,}5\sqrt{3}; 0]$;
b) $\mathrm{S}[3; 2]$; $a = 5$; $b = 3$; $e = 4$; $\mathrm{E}[-1; 2]$; $\mathrm{F}[7; 2]$.

13) Určete vzájemnou polohu:
   a) elipsy $\varepsilon: \frac{x^2}{39} + \frac{y^2}{13} = 1$ a přímky $p: y = 2x + 13$,
   b) elipsy $\varepsilon: 4x^2 + 9y^2 = 36$ a přímky $p: x = 3t; y = 2 - 2t$ $(t \in R)$.

řešení: a) tečna s bodem dotyku T[–6; 1]; b) sečna s průsečíky $X_1[0; 2]$; $X_2[3; 0]$.

14) Určete délku tětivy, kterou na elipse $\varepsilon: x^2 + 2y^2 - 8y = 0$ vytíná přímka $p: y = 2x$.

řešení: $d = \frac{16\sqrt{5}}{9}$.

15) Napiš rovnice tečen elipsy $\varepsilon: 4x^2 + y^2 = 16$, které jsou kolmé k přímce $p: x + 2y + 2 = 0$.

řešení: $t_1: 2x - y + 4\sqrt{2} = 0, t_2: 2x - y - 4\sqrt{2} = 0$.

16) Napište rovnice tečen k elipse $\varepsilon: 9x^2 + 25y^2 = 225$ rovnoběžných s přímkou $p: 4x + 5y - 7 = 0$.

řešení: $t_1: 4x + 5y + 25 = 0, t_2: 4x + 5y - 25 = 0$.

17) Elipsa se dotýká osy *x* v bodě A[–4; 0] a osy *y* v bodě B[0; 3]. Napište její rovnici, jsou-li její osy rovnoběžné se souřadnými osami.

řešení: $9x^2 + 16y^2 + 72x - 96y + 144 = 0$.

18) Osy elipsy jsou rovnoběžné se souřadnými osami, elipsa se dotýká osy y v bodě A[0; 4] a protíná osu x v bodech B[3;0] a v bodě C[9;0]. Napište její rovnici.

řešení: $\frac{(x-6)^2}{36} + \frac{3(y-4)^2}{64} = 1.$

19) Určete délku tětivy, kterou vytíná elipsa $\varepsilon: x^2 + 2y^2 = 18$ na přímce $p: x + 2y - 6 = 0.$

řešení: $d = 2\sqrt{5}.$

20) Najděte společné body elipsy ε a kružnice k, je-li $\varepsilon: x^2 + 4y^2 = 17, k: x^2 + y^2 = 5.$

řešení: A_1[1; 2]; A_2[–1; 2]; A_3[1; –2]; A_4[–1; –2].

23 Analytická geometrie – hyperbola, parabola

1) Napište rovnici přímky p, která prochází středem hyperboly $h: x^2 - y^2 + 4x - 2y + 13 = 0$ a je rovnoběžná s přímkou $q: 2x - y + 2 = 0.$

řešení: $p: 2x - y + 3 = 0.$

2) Určete střed, vrcholy, ohniska a asymptoty hyperboly $h: x^2 - 4y^2 - 6x + 16y - 11 = 0$ a načrtněte ji.

řešení: S[3; 2]; a = 2; b = 1; A[5; 2]; B[1; 2]; $e = \sqrt{5}$; E[3 – $\sqrt{5}$; 2]; F[3 + $\sqrt{5}$; 2];
$a_1: x - 2y + 1 = 0;\ a_2: x + 2y - 7 = 0.$

3) Napište rovnici takové tečny hyperboly $h: 9x^2 - 16y^2 = 144$, která je rovnoběžná s přímkou $p: 5x - 4y = 10.$

řešení: $t_1: 5x - 4y + 16 = 0, t_2: 5x - 4y - 16 = 0.$

4) Rozhodněte, zda rovnice $9x^2 - 16y^2 - 36x - 96y - 252 = 0$ je rovnicí hyperboly. Je-li tomu tak, najděte její střed a velikosti obou poloos.

řešení: S[2; –3], a = 4 , b = 3.

5) Napište rovnici hyperboly se středem v počátku soustavy souřadnic, která má hlavní poloosu o velikosti a = 3, prochází bodem A[5; 2] a určete také rovnice jejích asymptot.

řešení: $x^2 - 4y^2 - 9 = 0, a_1: x - 2y = 0, a_2: x + 2y = 0.$

6) Napište rovnici hyperboly se středem v počátku soustavy souřadnic a osami v osách soustavy souřadnic, která prochází bodem $M[\sqrt{2}; 2]$ a jednou její asymptotou je přímka $p: 2x - y = 0.$

řešení: $4x^2 - y^2 = 4.$

7) Určete číslo q tak, aby přímka $y = 2x + q$ byla tečnou hyperboly $h: x^2 - y^2 = 1$. Určete souřadnice dotykového bodu.

řešení: $q_{1,2} = \pm\sqrt{3}$; $T_1\left[-\frac{2\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$; $T_2\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right].$

8) Vypočtěte obsah trojúhelníku, tvořeného asymptotami hyperboly $h: 9x^2 - 4y^2 = 36$ a přímkou $b: x = 6$.

řešení: S = 54.

9) Určete souřadnice průsečíku hyperboly $h: 16x^2 - 25y^2 + 64x - 336 = 0$ s osami soustavy souřadnic.

řešení: S osou *x* [3; 0], [–7; 0]; s osou *y* neexistují.

10) Napište rovnici rovnoosé hyperboly se středem v počátku soustavy souřadnic, osami v osách *x*, *y*, která prochází bodem A[–5; 3].

řešení: $x^2 - y^2 = 16$.

11) Napište rovnici paraboly, která má ohnisko A[2; –1] a řídící přímku $d: x = -4$.

řešení: $(y + 1)^2 = 12(x + 1)$.

12) Dokažte, že rovnice $x^2 - 6x - 12y + 57 = 0$ je rovnicí paraboly. Najděte její vrchol, ohnisko a řídící přímku.

řešení: V[3, 4], F[3, 7]; $d: y = 1$.

13) Napište rovnice tečen vedených z bodu P[1; –3] k parabole $x^2 = 8y$.

řešení: $t_1: 3x - 2y - 9 = 0$; $t_2: x + y + 2 = 0$.

14) Napište rovnici paraboly, která má vrchol V[–2; 1], prochází bodem M[0; 3] a má osu:
   a) rovnoběžnou s osou *x*,
   b) rovnoběžnou s osou *y*.
   Určete její ohnisko F a rovnici její řídící přímky.

řešení: a) $y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$; F[–1,5; 1]; $d: x + 2{,}5 = 0$,
b) $x^2 + 4x - 2y + 6 = 0$; F[–2; 1,5]; $d: y - 0{,}5 = 0$.

15) Určete rovnici, vrchol V a ohnisko F paraboly, která má osu rovnoběžnou s osou *x* a prochází body M[–7; 12]; N[2,6; 0] a P[0,5; –3].

řešení: $y^2 + 10x - 4y - 26 = 0$; V[3, 2]; F[0,5; 2].

16) Je dána parabola $y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$.
   a) Určete její ohnisko F a rovnici řídící přímky *d*.
   b) Napište rovnici tečny dané paraboly, která je rovnoběžná s přímkou $p: 3x - y + 7 = 0$.

řešení: a) F[1,5; –2]; $d: 2x + 3 = 0$; b) $t: 6x - 2y - 3 = 0$.

17) Napište rovnice všech přímek, které procházejí bodem M[0; –1] a mají s parabolou $y^2 - 2y - 4x + 13 = 0$ společný právě jeden bod.

řešení: $t_1: x - y - 1 = 0$, $t_2: x + 3y + 3 = 0$ a přímka $y = -1$.

18) Určete rovnici paraboly $y = ax^2 + bx + c$, která prochází body M_1[1; 7], M_2[–1; 3], M_3[0; 4].

řešení: $y = x^2 + 2x + 4$.

24 Posloupnosti a řady

1) Vypočtěte počet členů n dané aritmetické posloupnosti a jejich součet s_n, je-li $a_1 = 450; d = -24;\ a_n = 210$.

řešení: $n = 11;\ s_n = 3630$.

2) V aritmetické posloupnosti platí $a_1 + a_5 = -8;\ a_2 + a_6 = -4$. Napište prvních pět členů této posloupnosti.

řešení: $-8;\ -6;\ -4;\ -2;\ 0$.

3) Určete součet prvních deseti členů aritmetické posloupnosti, je-li $a_3 = -4;\ a_5 = 2{,}4$.

řešení: $s_{10} = 40$.

4) V aritmetické posloupnosti platí:
$a_2 + a_4 = 24$
$a_3 : a_7 = \frac{3}{8}$
Vypočtěte patnáctý člen posloupnosti.

řešení: $a_{15} = 72$.

5) Železné roury se skládají do vrstev tak, že roury vrstvy hořejší zapadají do mezer vrstvy dolejší. Do kolika vrstev se složí 75 rour, má-li hořejší vrstva jen 3 roury?

řešení: Do 10 vrstev.

6) Délky stran pravoúhlého trojúhelníku tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Jak jsou strany dlouhé, je-li obsah trojúhelníku 6 dm^2?

řešení: 3, 4 a 5 dm.

7) Mezi čísla $a_1 = 3$ a $a_n = -9$ vložme tolik členů aritmetické posloupnosti, aby součet s_n byl –33. Určete hodnoty *d* a *n*.

řešení: *d* = –1,2; *n* = 11.

8) Určete a_1 a *d* aritmetické posloupnosti, ve které platí: $a_1 + a_7 = 22; a_3 \cdot a_4 = 88$.

řešení: $a_1 = 2; d = 3$.

9) V geometrické posloupnosti je dáno $a_1 = 64, a_n = 8$ a $q = 0{,}5$. Určete *n* a s_n.

řešení: $n = 4, s_n = 120$.

10) V geometrické posloupnosti určete a_5 a *q*, je-li dáno $a_6 = 6, a_8 = 24$.

řešení: $q = 2, a_5 = 3$ nebo $q = -2, a_5 = -3$.

11) V geometrické posloupnosti je $q = 2, a_n = \frac{16}{3}, s_n = \frac{21}{2}$. Určete počet členů *n*.

řešení: *n* = 6.

12) V geometrické posloupnosti je dáno $a_1 = 32, q = \frac{1}{2}, a_n = \frac{1}{4}$. Určete *n* a s_n.

řešení: $n = 8, s_8 = \frac{255}{4}$.

13) Stanovte první člen a kvocient geometrické posloupnosti, pro kterou platí: $a_3 + a_4 + a_7 = 5, a_4 + a_5 + a_8 = 15$.

řešení: $q = 3, a_1 = \frac{1}{153}$.

14) Přičteme-li k číslům $x = -1, y = 11, z = 95$ stejné číslo, dostaneme po řadě první tři členy geometrické posloupnosti. Určete v této posloupnosti a_5, s_5.

řešení: $a_5 = 4802, s_5 = 5602$.

25 Kombinatorika

1) Sestavujeme vlajku ze 3 různobarevných vodorovných pruhů. K dispozici jsou bílý, červený, modrý, zelený a žlutý pruh látky.
   a) Kolik vlajek lze sestavit?
   b) Kolik z nich má modrý pruh?
   c) Kolik jich má modrý pruh uprostřed?
   d) Kolik jich nemá červený pruh uprostřed?

řešení: a) 60; b) 36; c) 12; d) 48.

2) Kolik přirozených čísel větších než 15 lze vytvořit z číslic 0, 1, 2, 3, 5, jestliže se v nich žádná číslice neopakuje?

řešení: 252 čísel.

3) Určete počet prvků, z nichž lze utvořit:
   a) 240 dvoučlenných variací,
   b) dvakrát více čtyřčlenných variací než tříčlenných variací.

řešení: a) *n* = 16; b) *n* = 5.

4) Zvětší-li se počet prvků o dva, zvětší se počet tříčlenných variací:
   a) desetkrát,
   b) o 150.

   Určete původní počet prvků.

řešení: a) *n* = 3; b) *n* = 5.

5) S připomínkami k zákonu chce vystoupit 6 poslanců A, B, C, D, E, F. Určete:
   a) počet všech možných pořadí jejich vystoupení,
   b) v kolika případech vystupuje A až po E,
   c) v kolika případech vystupuje A ihned po E.

řešení: a) 720; b) 360; c) 120.

6) V pětimístné lavici sedí 5 studentů.
   a) Kolika způsoby si mohou sednout?
   b) Kolika způsoby si mohou sednout, jestliže má daný žák sedět na kraji?
   c) Kolika způsoby si mohou sednout, jestliže mají dva daní žáci sedět vedle sebe?

řešení: a) 120; b) 48; c) 48.

7) Kolikrát lze přemístit slova ve verši „Sám svobody kdo hoden, svobodu zná vážiti každou“, nemají-li se promíchat slova věty hlavní a vedlejší?

řešení: 1152.

8) Určete počet prvků tak, aby:
   a) z nich bylo možno utvořit právě 40 320 permutací,
   b) při zvětšení jejich počtu o 2 se počet permutací zvětšil 56krát,
   c) při zmenšení jejich počtu o dva se počet permutací zmenšil 20krát.

řešení: a) $n = 8$; b) $n = 6$; c) $n = 5$.

9) Test se skládá ze 2 dějepisných, 2 zeměpisných a 1 literární otázky. Připraveno je 30 dějepisných, 25 zeměpisných a 20 literárních otázek. Kolik variant testu lze vytvořit?

řešení: 2 610 000.

10) Jaký je počet úhlopříček v konvexním n-úhelníku?

řešení: $\frac{1}{2}n(n-3)$.

11) Zvětší-li se počet prvků o 15, zvětší se počet kombinací druhé třídy bez opakování vytvořených z těchto prvků třikrát. Určete původní počet prvků.

řešení: $n = 21$.

12) Kolik SPZ existuje, jsou-li tvořeny postupně 3 písmeny a 4 číslicemi (písmen je 28)?

řešení: $n = 28^3 \cdot 10^4$.

13) Kolik čtyřciferných čísel, v nichž se mohou cifry i opakovat, lze vytvořit z cifer 0, 1, 2, 3, …, 9?

řešení: 9000.

14) Vyjádřete jediným kombinačním číslem součet:

$$\binom{4}{4}+\binom{5}{4}+\binom{6}{4}+\binom{7}{4}+\binom{8}{4}+\binom{9}{4}$$

řešení: $\binom{10}{5}$.

15) V množině všech přirozených čísel řešte rovnici:

$$\binom{x}{x-2}+\binom{x}{x-1}=\binom{x+1}{2}$$

řešení: $x \in \mathrm{N}; x \geq 2$.

16) Řešte rovnici s neznámou $x \in \mathrm{N}$:

$$12\binom{x}{x-1}+\binom{x+4}{x+2}=162$$

řešení: $x = 8$.

17) Vypočtěte užitím binomické věty: $\left(\sqrt{3}+2\right)^4$.

řešení: $97 + 56\sqrt{3}$.

18) Určete desátý člen binomického rozvoje výrazu:

$\left(5x^3 - \frac{\sqrt{2}}{x}\right)^{12}$

řešení: $-440000\sqrt{2}$.

19) Určete absolutní člen binomického rozvoje výrazu:

$\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^{6}$

řešení: 4860.

20) Určete binomický rozvoj výrazu:

$\left(2x - \frac{y}{3}\right)^{4}$

řešení: $16x^4 - \frac{32}{3}x^3y + \frac{8}{3}x^2y^2 - \frac{8}{27}xy^3 + \frac{1}{81}y^4$.

26 Pravděpodobnost a statistika

1) Hodíme třemi kostkami. Je pravděpodobnější padnutí součtu 11, nebo 12?

řešení: $P_{11} = \frac{27}{216}$, $P_{12} = \frac{25}{216}$, tedy $P_{11} > P_{12}$.

2) Adam, Břetislav a Cyril se v kasinu zastavili u hracího stolu, na němž hází krupiér třemi kostkami. Adam prohlásil: „V příštím hodu padne součet dělitelný 7.“ Břetislav řekl: „Já myslím, že padne trojice stejných čísel.“ Cyril tvrdí: „Ani jeden nemáte pravdu. Výsledný součet bude končit číslicí 5.“ Který z nich má největší šanci, že bude mít pravdu?

řešení: $P_A = \frac{30}{216}, P_B = \frac{6}{216}, P_C = \frac{16}{216}$, tedy $P_A > P_C > P_B$.

3) Nechť a je pravděpodobnost toho, že při současném hodu dvěma hracími kostkami bude součet počtu ok na jejich horních stěnách roven 7. Nechť b je pravděpodobnost toho, že při současném výběru dvou karet ze souboru 32 karet (po 8 kartách každé ze 4 barev) budou obě vybrané karty téže barvy. Nechť c je pravděpodobnost toho, že náhodně vybrané dvojciferné číslo je dělitelné čtyřmi. Uspořádejte čísla a, b, c podle velikosti.

řešení: $a = \frac{6}{36}$, $b = \frac{112}{496}$, $c = \frac{22}{90}$, tedy $c > b > a$.

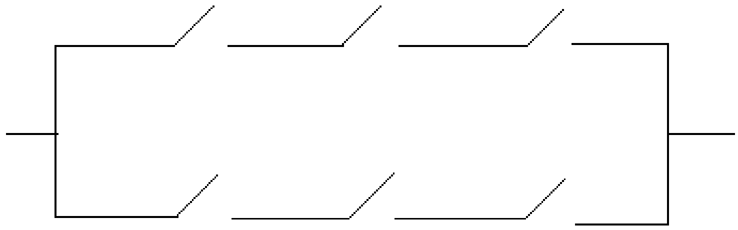
4) Učitel dá žákům k dispozici seznam 30 příkladů a oznámí jim, že 3 z těchto příkladů se objeví v písemce. Jaká je pravděpodobnost, že v písemce budou 3 příklady, které se Adam naučil, jestliže se Adam naučil:
   a) právě 3 příklady?
   b) právě 10 příkladů?
   c) právě 15 příkladů?

řešení: a) $P = \frac{1}{\binom{30}{3}} = \frac{1}{4060}$; b) $P = \frac{\binom{10}{3}}{\binom{30}{3}} = \frac{120}{4060}$; c) $P = \frac{\binom{15}{3}}{\binom{30}{3}} = \frac{455}{4060}$.

5) V rámci přípravy na písemku se Břetislav naučí 10 z 20 příkladů, které jsou v učebnici. Učitel z těchto příkladů vybere 4 a sestaví z nich písemku. Jaká je pravděpodobnost, že v písemce budou:
   a) alespoň 2 příklady, které se Břetislav naučil?
   b) 4 příklady, které se Břetislav naučil?

řešení: a) $P = 1 - \frac{\binom{10}{4}+\binom{10}{3}\cdot 10}{\binom{20}{4}} = \frac{3435}{4845}$, příp. $P = \frac{\binom{10}{2}\cdot\binom{10}{2}+\binom{10}{3}\cdot 10+\binom{10}{4}}{\binom{20}{4}} = \frac{3435}{4845}$; b) $P = \frac{\binom{10}{4}}{\binom{20}{4}} = \frac{210}{4845}$.

6) Na obrázku níže je schéma elektrického zapojení se 6 spínači, z nichž každý dáme zcela nahodile buď do polohy zapnuto, nebo vypnuto. Jaká je pravděpodobnost, že soustavou prochází proud?



řešení: $P = \frac{15}{64}$.

7) Hodíme bílou a černou hrací kostkou. Nechť b značí číslo, které padlo na bílé kostce, c číslo na černé kostce. Rozhodněte, zda jsou jevy A, B nezávislé, jestliže:
   a) $A: b + c = 6. B: c = 1.$
   b) $A: b = c. B: c < 3.$

řešení: a) ne; b) ano.

8) Narození dívky či chlapce považujeme z dlouhodobého hlediska za stejně pravděpodobné. Jaká je pravděpodobnost, že v rodině se třemi dětmi bude:
   a) nejstarší dítě chlapec a zároveň nejmladší dívka?
   b) více dívek než chlapců?
   Jsou oba výše uvedené jevy nezávislé?

řešení: a) $P = \frac{1}{4}$; b) $P = \frac{1}{2}$; Jevy jsou nezávislé.

9) Narození dívky či chlapce považujeme z dlouhodobého hlediska za stejně pravděpodobné. Jaká je pravděpodobnost, že v rodině se čtyřmi dětmi:
   a) bude alespoň jeden chlapec?
   b) bude stejný počet dívek jako chlapců?
   c) budou 4 chlapci?

řešení: a) $P = 0{,}9375$; b) $P = 0{,}375$; c) $P = 0{,}0625$.

10) Pan Kohout chová v kurníku 10 slepic, z nichž 3 již nenesou žádná vejce. V noci přijde kuna a 3 slepice zahubí. Jaká je pravděpodobnost, že:
   a) byly zahubeny všechny 3 již nenesoucí slepice?
   b) byly zahubeny alespoň 2 nesoucí slepice?

řešení: a) $P = \frac{1}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{120}$; b) $P = \frac{\binom{7}{2}\cdot 3+\binom{7}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{98}{120}$.

11) V zásilce je 60 výrobků, z nichž 5 je vadných. Jaká je pravděpodobnost, že:
  a) náhodně vybraný výrobek bude vadný?
  b) mezi 10 náhodně vybranými výrobky bude všech 5 vadných výrobků?

řešení: a) $P = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$; b) $P = \frac{\binom{55}{5}}{\binom{60}{10}} = \frac{3}{65018}$.

12) Zjistěte počet přirozených čtyřciferných čísel, která lze utvořit z číslic 1, 5, 6, 8, 9, přičemž číslice se nesmějí opakovat. Pak určete pravděpodobnost, že namátkou zvolené číslo z takto utvořených čísel je dělitelné čtyřmi.

řešení: 120 čísel; $P = 0{,}2$.

13) Z čísel 1, 2, 3, …, 100 vybereme náhodně 3 čísla. Jaká je pravděpodobnost, že:
  a) mezi vybranými čísly bude alespoň jedno dělitelné 25?
  b) všechna vybraná čísla budou dělitelná 10?

řešení: a) $P = 1 - \frac{\binom{96}{3}}{\binom{100}{3}} = \frac{18820}{161700}$, příp. $P = \frac{4\cdot\binom{96}{2}+\binom{4}{2}\cdot 96+\binom{4}{3}}{\binom{100}{3}}$; b) $P = \frac{\binom{10}{3}}{\binom{100}{3}} = \frac{120}{161700}$.

14) Závodu v přespolním běhu se účastní 13 výkonnostně rovnocenných závodníků, mezi nimiž jsou Petr a Pavel. Jaká je pravděpodobnost, že:
  a) se Petr umístí na lepším místě než Pavel?
  b) Petr vyhraje a Pavel skončí poslední?
  c) se Petr a Pavel umístí na stupních vítězů?
  (Možnost, že by se dva závodníci umístili na témže místě, neuvažujeme.)

řešení: a) $P = \frac{1}{2}$; b) $P = \frac{1}{156}$; c) $P = \frac{1}{26}$.

15) Při hodu mincí považujeme padnutí rubu za stejně pravděpodobné jako padnutí líce. Zkoumáme jev, kdy při všech provedených hodech padne líc. Jaký je největší možný počet hodů, aby pravděpodobnost tohoto jevu neklesla pod 0,005?

řešení: 7.

16) U ústní maturitní zkoušky je 30 otázek, z nichž si každý student losuje jednu. V průběhu dne se vytažená otázka mezi losované již nevrací. Studenti se obávají čtyř otázek. Určete pravděpodobnost vytažení obávané otázky:
  a) prvním studentem?
  b) druhým studentem, byla-li již jedna obávaná otázka vytažena?
  c) třetím studentem, jestliže zatím nebyla vytažena žádná obávaná otázka?

řešení: a) $P = \frac{2}{15}$; b) $P = \frac{3}{29}$; c) $P = \frac{1}{7}$.

17) Z čísel 1, 2, 3, …, 100 vybereme náhodně 3 čísla. Jaká je pravděpodobnost, že součet těchto 3 čísel bude dělitelný 3?

řešení: $P = \frac{\binom{34}{3}+2\cdot\binom{33}{3}+34\cdot 33^2}{\binom{100}{3}} = \frac{53922}{161700}$.

18) Ostrov má tvar kruhu s poloměrem $r = 4$ km. Jaká je pravděpodobnost, že z náhodně vybraného místa na ostrově je to ke studni ve středu ostrova:
   a) méně než 3 km,
   b) blíže než k moři?

řešení: a) $P = \frac{9}{16}$; b) $P = \frac{1}{4}$.

19) Po divadelním představení si všech 50 diváků šlo vyzvednout své kabáty do šatny. Roztržitá šatnářka však nemohla najít útržky od jednotlivých svršků, a tak začala vydávat kabáty zcela nahodile – vždy po jednom kusu jednomu divákovi. Jaká je pravděpodobnost, že:
   a) všichni diváci dostanou své vlastní kabáty?
   b) pan Novák, který byl mezi diváky, dostane svůj kabát?
   Výsledek zapište ve tvaru $a \cdot 10^n$, kde $1 \leq a < 10, n \in Z$.

řešení: a) $P = \frac{1}{50!} \doteq 3{,}29 \cdot 10^{-65}$; b) $P = \frac{1}{50} = 2 \cdot 10^{-2}$.

20) Pan Dvořák jel automobilem prvních 20 km rychlostí 80 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$, dalších 30 km jel rychlostí 90 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Vypočítejte průměrnou rychlost jeho jízdy.

řešení: Asi 85,7 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

21) V testu při zkoušce dostalo 15 studentů známku 1, dalších 35 studentů dostalo známku 2, 30 studentů dostalo známku 3, 15 studentů známku 4 a zbylých 5 studentů dostalo známku 5. Vypočítejte průměrnou známku z testu, modus a medián. Výsledky testu znázorněte graficky kruhovým diagramem.

řešení: Průměr 2,6; modus 2; medián 2,5.

22) Při kontrole hmotnosti sušenek bylo zkontrolováno 10 krabic se sušenkami a zjistily se následující hodnoty: 250 g, 247 g, 251 g, 249 g, 252 g, 248 g, 251 g, 250 g, 251 g, 248 g. Vypočítejte průměrnou hmotnost krabice sušenek a směrodatnou odchylku.

řešení: Průměr 249,7 g; směrodatná odchylka asi 1,55 g.

23) Při zjišťování počtu nezletilých dětí ve 30 vybraných rodinách byly získány tyto výsledky: 1, 1, 0, 2, 3, 4, 2, 2, 3, 0, 1, 2, 2, 4, 3, 3, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 0, 2, 1, 1, 2, 3, 3, 2.
   a) Uspořádejte získané údaje do tabulky rozdělení četností, vypočítejte relativní četnosti a vyjádřete je v procentech.
   b) Rozdělení četností znázorněte graficky pomocí spojnicového diagramu.
   c) Vypočtěte aritmetický průměr počtu nezletilých dětí ve 30 vyšetřovaných rodinách.

řešení: c) 1,8.

24) V určité dílně, v níž se vyrábějí stejné výrobky, byly naměřeny šesti dělníkům tyto časy (v minutách) potřebné ke zhotovení jednoho výrobku: 3, 4, 5, 6, 10, 12. Určete dobu, které je v průměru třeba ke zhotovení jednoho výrobku.

řešení: Asi 5,3 minuty.

25) Jsou dány v procentech tyto údaje o růstu určitého druhu výroby v devíti po sobě jdoucích letech: 103,5; 104,7; 107,6; 105,8; 112,7; 116,5; 115,3; 108,5; 110,6. Vypočítejte průměrné roční tempo růstu této výroby za uvedené období.

řešení: Asi 109,38 %.

26) Ve třídě s 25 žáky prospělo s vyznamenáním 7 žáků, prospělo 14 žáků, neprospěli 3 žáci, nebyl klasifikován 1 žák. Vypočtěte relativní četnosti znaku „prospěch“. Sestrojte histogram rozdělení četností.

27) Na 10 pokusných polích sledovali hektarový výnos pšenice s těmito výsledky (v q/ha): 45,6; 46,2; 48,9; 50,1; 52,3; 49,3; 40,1; 45,0; 46,7; 42,8. Určete aritmetický průměr a směrodatnou odchylku této veličiny.

řešení: Průměr 46,7 q/ha; směrodatná odchylka asi 3,43 q/ha.

28) V tabulce je uvedena hustota obyvatel na 1 km^2 a celková rozloha v km^2 pěti středoevropských států:

	Polsko	ČR	Slovensko	Rakousko	Maďarsko
hustota	124	131	110	97	110
rozloha	312 700	78 900	49 000	84 900	93 000

Jaká je průměrná hustota obyvatel v této části Evropy?

řešení: Asi 118 obyvatel na 1 km^2.

29) Určete průměrnou absolutní odchylku a směrodatnou odchylku pro 3 soubory o témž rozsahu $n = 5$, které mají týž aritmetický průměr $\bar{x}$ hodnot sledovaného znaku x:
a) 10, 10, 10, 10, 10
b) 8, 9, 10, 11, 12
c) 0, 5, 10, 15, 20

řešení: Průměrná absolutní odchylka: a) 0, b) 1,2, c) 6; směrodatná odchylka: a) 0, b) $\sqrt{2}$, c) $5\sqrt{2}$.

30) Při přípravě čajové směsi bylo smícháno 5 kg čaje v ceně 150 Kč za kg a 15 kg čaje v ceně 90 Kč za kg. Jaká bude cena 1 kg směsi?

řešení: 105 Kč.

31) Jaká bude výsledná koncentrace kyseliny sírové, při jejíž přípravě bylo použito 8 kg 18% kyseliny a 2 kg 96% kyseliny?

řešení: 33,6 %.

32) Při měření tělesné výšky 200 sedmnáctiletých chlapců byly získány tyto výsledky:

Výška (cm)	158-162	163-167	168-172	173-177	178-182	183-187	188-192
Četnost	9	20	36	82	35	14	4

Sestrojte odpovídající sloupkový diagram rozdělení četností, určete průměrnou výšku postavy a modus.

řešení: Průměr 174,3 cm; modus 175 cm.

33) Tabulka uvádí roční příjmy 30 podnikatelů s rozdělením četností:

Roční příjem (Kč)	200 000	300 000	400 000	500 000	750 000
Četnost	9	8	8	4	1

Vypočtěte průměrný roční příjem podnikatelů a medián.

řešení: Průměr asi 338 333 Kč; medián 300 000 Kč.

34) V jedné zemi vzrostl index spotřebitelských cen v prosinci roku 2017 oproti prosinci předchozího roku 1,75krát. Jaký byl jeho průměrný čtvrtletní růst?

řešení: Asi 1,15.

35) Určete aritmetický průměr a směrodatnou odchylku délky x, jsou-li naměřené délkové hodnoty x_i a jejich četnosti n_i dány tabulkou:

x_i	4,7	4,8	4,9	5,0	5,1	5,2	5,3
n_i	4	7	7	13	10	5	4

řešení: Průměr asi 5,00; směrodatná odchylka asi 0,17.

36) Měřením v laboratoři byly zjištěny následující délkyválečku (v milimetrech):
302; 310; 312; 310; 313; 318; 305; 309; 310; 309.
Vypočítejte aritmetický průměr, modus a medián.

řešení: Průměr 309,8 mm; modus 310 mm; medián 310 mm.

37) Při střelecké soutěži byl v kategorii dívek s 30 účastnicemi průměrný nástřel 52 bodů a v kategorii chlapců s 20 účastníky 36 bodů. Jaký byl průměrný nástřel účastníka soutěže?

řešení: 45,6 bodů.

38) Házíme mincí, až padne poprvé líc; znak x udává, v kolikátém hodu se tak stalo.
Opakování tohoto pokusu 100krát dalo následující rozdělení četností:

Čekání na líc	1	2	3	4	5	6	7	8
četnost	53	21	13	8	3	1	0	1

Vypočtěte aritmetický průměr, modus a medián.

řešení: průměr 1,95; modus 1; medián 1.

27 Komplexní čísla

1) Vypočítejte:

a) $\frac{3+i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}}$

b) $(2+i)\cdot i\cdot\frac{3+i}{2-i}$

c) $-\frac{i-1}{2}-\frac{i}{i-1}\cdot i+1$

d) $\frac{\frac{i}{2-i}+\frac{1}{i}}{1+\frac{1}{2i+1}}$

řešení: a) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, b) $-3+i$, c) $1-i$, d) $-\frac{1}{2}i$.

2) Dokažte, že pro každé reálné číslo p je komplexní číslo $z = \frac{i}{p-3i} + \frac{i}{p+3i}$ ryze imaginární. Potom určete $p \in R$ tak, aby platilo $z = \frac{1}{3}i$.

řešení: $z = \frac{2p}{p^2+9}i$, $p = 3$.

3) Určete, pro která reálná čísla b je komplexní číslo $z = \frac{8-6b-ib}{1-ib}$: a) reálné, b) imaginární, c) ryze imaginární.

řešení: a) $b \in \left\{0;\ \frac{7}{6}\right\}$, b) $b \in R - \left\{0;\ \frac{7}{6}\right\}$, c) $b \in \{2;\ 4\}$.

4) Komplexní čísla $z_1 = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$, $z_2 = 10\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi\right)$ vyjádřete v algebraickém tvaru.

řešení: $z_1 = -3 + 3i$, $z_2 = 5\sqrt{3} - 5i$.

5) Vyjádřete komplexní čísla $z_3 = -2$, $z_4 = -1 + i\sqrt{3}$ v goniometrickém tvaru.

řešení: $z_3 = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$, $z_4 = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$.

6) Vypočítejte:
a) $2i^9 - i^{12} + 5i^{16} - 3i^{11}$
b) $(1-i)^4$

řešení: a) $4 + 5i$; b) -4.

7) Vypočítejte:

a) $\overline{\overline{(3+4i)}(3-7i)}$

b) $\overline{\left(\frac{1+i}{2-i}\right)}$

c) $\overline{\frac{1+i}{2-i}}$

d) $\frac{\overline{1+i}}{\overline{2-i}}$

řešení: a) $-19 + 33i$, b) $\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$, c) $\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i$, d) $\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$.

8) V Gaussově rovině znázorněte obrazy komplexních čísel $z_1 = 2 - i,\ z_2 = -2 - 4i$. Poté graficky určete: a) $2z_1$, b) $\frac{1}{2}z_2$, c) $z = 2z_1 + \frac{1}{2}z_2$.

9) V Gaussově rovině znázorněte obrazy komplexních čísel $z_1 = 1 + 2i,\ z_2 = 2 - i$. Poté graficky určete: a) $z_1 \cdot z_2$, b) $z_1 : z_2$.

10) Vypočítejte:

a) $\left|\frac{|\sqrt{3}-i|\cdot(i-1)}{|i\cdot(i-1)|-2i}\right|$

b) $\dfrac{\left|\frac{8-4i}{5i}\right|\cdot\left|\frac{1+i}{3-i}\right|}{\left|2i-1+|-i|\right|}$

řešení: a) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$, b) $\frac{2}{5}$.

11) Dokažte, že číslo $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}-i\sqrt{3}\right)+i\frac{\sqrt{2}}{4}$ je komplexní jednotkou.

12) Umocněte: $z=\left[\sqrt{3}(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)\right]^4$.

řešení: $-\frac{9}{2}+\frac{9}{2}\sqrt{3}i$.

13) Užitím Moivreovy věty umocněte a výsledek převeďte do algebraického tvaru:

a) $(1+i)^6$

b) $\left(\frac{i}{1+i}\right)^{100}$

c) $\left(\cos\frac{3\pi}{32}+i\cdot\sin\frac{3\pi}{32}\right)^8$

d) $\left(5\sqrt{3}-5i\right)^7$

řešení: a) $-8i$, b) $-\frac{1}{2^{50}}$, c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, d) $5\cdot 10^6\cdot\left(-\sqrt{3}+i\right)$.

14) Vypočtěte: $(-1+i)^{66}-i(1+i)^{80}$.

řešení: $-129\cdot 2^{33}i$.

15) Určete reálná čísla *x*, *y* tak, aby platilo $x(y+i)+y(x-i)=2x+2yi$.

řešení: $x=3, y=1$ nebo $x=y=0$.

16) Řešte rovnice s neznámými $x, y\in R$, $z\in C$:

a) $x(1+i)+y(1-i)=4+2i$

b) $(2+i)^3-\frac{1-i}{i}=x-4yi-y$

c) $z\bar{z}-z=\overline{6-2i}$

d) $|z+2-i|=5(z+3i)$

řešení: a) $x=3, y=1$; b) $x=0, y=-3$;
c) $z_1=2-2i, z_2=-1-2i$; d) $z=1-3i$.

17) Určete komplexní čísla *z*, *w* tak, aby byla řešením soustavy:

$$(1+i)z-3w=-7-6i$$
$$2z+(2+i)w=6+5i$$

řešení: $z=1-i, w=3+2i$.

18) Řešte rovnice s neznámou x ∈ C. Výsledek zapište nejprve v goniometrickém tvaru, pak ve tvaru algebraickém. Kořeny znázorněte v Gaussově rovině.

a) $x^4 + 16 = 0$

b) $x^6 - 1 = 0$

c) $x^3 - 64 = 0$

d) $x^3 - 1 + i = 0$

řešení: a) $x_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i,\ x_1 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i,$
$x_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i,\ x_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i;$
b) $x_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1, x_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ x_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$
$x_3 = \cos\pi + i\sin\pi = -1, x_4 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, x_5 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i;$
c) $x_0 = 4(\cos 0 + i\sin 0) = 4, x_1 = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -2 + 2\sqrt{3}i,$
$x_2 = 4\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = -2 - 2\sqrt{3}i;$ d) $x_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right),$
$x_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt[6]{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right), x_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12} + i\sin\frac{23\pi}{12}\right).$

19) Zobrazte v Gaussově rovině množinu všech komplexních čísel z, pro něž platí:

a) $|z + 1| \geq |z - i|$
b) $|z - 1| \geq |z + 1|$

20) Napište kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty, jestliže jeden kořen rovnice je $x_1 = 1 - i$. Oba kořeny této rovnice vyjádřete v goniometrickém tvaru.

řešení: $a(x^2 - 2x + 2) = 0, a \in R - \{0\}, x_{1,2} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)\right)$

28 Diferenciální počet, limita funkce

1) Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce:

a) $f: y = 2x^2 + 4x - 1$ v bodě A$[1, f(1)]$

b) $f: y = \cos x$ v bodě A $\left[\frac{\pi}{6}, f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$

c) $f: y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ v bodě A $\left[\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

řešení: a) $t: 8x - y - 3 = 0, n: x + 8y - 41 = 0$; b) $t: x + 2y - \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{6} = 0,$
$n: 2x - y + \frac{3\sqrt{3} - 2\pi}{6} = 0$; c) $t: x - y - \frac{\pi}{4} = 0, n: x + y - \frac{\pi}{4} = 0.$

2) Určete bod $a \in D_f$, v němž je směrnice tečny ke grafu funkce *f* rovna *k*:

a) $f: y = 2x^3, k = 6$

b) $f: y = \mathrm{tg}\, x, x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), k = 2$

řešení: a) $a = \pm 1$; b) $a = \frac{\pi}{4}$.

3) Na základě definice limity funkce v daném bodě dokažte, že platí:

a) $\lim\limits_{x \to 1} (5x - 3) = 2$

b) $\lim\limits_{x \to -\frac{2}{3}} \frac{4 - 9x^2}{2 + 3x} = 4$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2}{1 + x} = 1$

4) Vypočtěte limity funkcí (pokud existují):

a) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{9 - x^2}{3 - \sqrt{3x}}$

b) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{3x + 6}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x}}{x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1 - x} - \sqrt{1 + x}}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x + \sin x}$

f) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^2}\right)$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)}$

h) $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin 2x + 2 \sin x}{\sin^2 x}$

i) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{1 - \mathrm{tg}\, x}$

j) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - \cos 2x - 1}{\sin x - \cos x}$

k) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos^2 x - \cos x + \sin^2 x}{x^2}$

l) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x + 1 - x}{(x - 1) \cdot \ln x}$

m) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\mathrm{tg}\, x - \sin x}{\sin^3 x}$

n) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x + 1} - 1}$

o) $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \mathrm{tg}^2 x\right)$

p) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{x}$

q) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)}{\frac{3}{x}}$

r) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x \cdot \ln\frac{x-2}{x+2}\right)$

řešení: a) 12; b) 4; c) $\frac{1}{2}$; d) –1; e) 0; f) neexistuje; g) 0; h) 0; i) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; j) $\sqrt{2}$;
k) $\frac{1}{2}$; l) $-\frac{1}{2}$; m) $\frac{1}{2}$; n) 4; o) $-\infty$; p) 2; q) $\frac{1}{3}$; r) –4.

5) Určete asymptoty ke grafům funkce:

a) $f\colon y = \frac{x^2+1}{x+3}$

b) $f\colon y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$

c) $f\colon y = \frac{x}{2x-1} + x$

d) $f\colon y = 3x + \frac{3}{x-2}$

e) $f\colon y = \frac{x^2}{x-2}$

f) $f\colon y = \frac{1}{x^2}$

řešení: a) $x = -3, y = x - 3$, b) $x = -1, y = \frac{1}{2}x - 1$, c) $x = \frac{1}{2}, y = x + \frac{1}{2}$,
d) $x = 2, y = 3x$, e) $x = 2, y = x + 2$, f) $x = 0, y = 0$.

6) Vyšetřete průběh funkce:

a) $y = 3x^2 - 5x^3$

b) $y = (x+2)^2(x+5)$

c) $y = \frac{10-5x}{(x-3)^2}$

d) $y = x^2 + \frac{1}{x^3}$

e) $y = \frac{x^3+4}{x^2}$

f) $y = \frac{\ln x}{2x}$

g) $y = e^{x^2}$

h) $y = \frac{x^2}{e^x}$

i) $y = 2x^2 - \ln x$

j) $y = x - 2\,\mathrm{arctg}\,x$

7) Místa A, B, C je třeba propojit co nejkratším potrubím, jehož jedna část má ležet na ose úsečky mezi místy A, B. Polohu všech tří míst je možné vyjádřit souřadnicemi bodů v kilometrové síti $A[-3; 0]$, $B[3; 0]$, $C[0; 4]$. Určete souřadnice křižovatky K a celkovou délku potrubí.

řešení: $K[0; \sqrt{3}]$, délka potrubí je přibližně 9,2 km.

8) Z úhlového železa dlouhého 8 m se má svařit kostra akvária tvaru kvádru tak, aby délky hran dna byly v poměru 2 : 3. Určete rozměry akvária tak, aby se do něho vešlo co nejvíce vody.

řešení: $\frac{8}{15}$ m, $\frac{4}{5}$ m, $\frac{2}{3}$ m.

9) Ze čtvercového kusu plechu o straně 300 mm se má vyrobit krabice bez víka tak, že se v rozích plechu vyříznou stejné čtverce. Určete rozměry dna tak, aby krabice měla maximální objem.

řešení: 200 x 200 mm.

10) Jaké rozměry bude mít obdélníkový výběh pro slepice, přiléhá-li delší stranou k drůbežárně a k ohrazení zbývajících stran je k dispozici 80 m pletiva, přičemž má být plocha výběhu co největší?

řešení: 20 m a 40 m.

11) Válcová jímka má pojmout 27 m^3 odpadu. Jaké musí mít rozměry, aby se na izolaci její stěny a dna spotřebovalo co nejméně materiálu?

řešení: $r = v \doteq 2{,}05$ m.

12) Do elipsy $4x^2 + 9y^2 = 36$ vepište obdélník maximálního obsahu. Určete jeho rozměry.

řešení: $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$.

29 Integrální počet

1) Integrujte:

a) $\int \frac{x^4 - 1 + \sqrt{x}}{x^3} dx$

b) $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} dx$

c) $\int \frac{x(\sqrt[4]{x} - x)}{\sqrt{x}} dx$

d) $\int \frac{x^3 + 2x^2 - 10x}{x - 2} dx$

e) $\int \mathrm{tg}^2 x \, dx$

f) $\int (\sin^2 x - \cos^2 x) dx$

g) $\int \left(\mathrm{tg}^2 x - \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx$

h) $\int \left(\mathrm{cotg}^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx$

i) $\int \frac{\cos x}{2+\sin x} dx$

j) $\int \frac{\cos x}{2\sin x - 1} dx$

k) $\int \mathrm{tg} 2x \, dx$

l) $\int x\sqrt{2x^2 - 8} \, dx$

m)$\int e^{x^3} \cdot x^2 \, dx$

n) $\int \sqrt{1+x^2} \cdot x \, dx$

o) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}} dx$

p) $\int e^x \sin x \, dx$

q) $\int \frac{\ln x}{x} dx$

r) $\int x^2 \sin 2x \, dx$

s)$\int x e^{-x^2} dx$

t) $\int \ln(x+1) \, dx$

u)$\int x^3 e^x dx$

řešení: a) $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2} - \frac{2\sqrt{x}}{3x^2} + C$, b) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - \frac{4}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C$, c) $\frac{4}{7}x \cdot \sqrt[4]{x^3} - \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C$, d) $\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 2x - 4\ln|x-2| + C$, e) $\mathrm{tg}\, x - x + C$, f) $-\frac{1}{2}\sin 2x + C$, g) $-x + C$, h) $-2\mathrm{cotg}\, x - x + C$, i) $\ln|2+\sin x| + C$, j) $\frac{1}{2}\ln|2\sin x - 1| + C$, k) $-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + C$, l) $\frac{1}{3}(x^2-4)\sqrt{2x^2-8} + C$, m) $\frac{1}{3}e^{x^3} + C$, n) $\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} + C$, o) $\frac{2}{3}(e^x+2)\sqrt{e^x-1} + C$, p) $\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$, q) $\frac{\ln^2 x}{2} + C$, r) $\frac{1-2x^2}{4}\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x + C$, s) $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$, t) $(x+1)\ln(x+1) - x + C$, u) $e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$.

2) Vypočtěte:

a) $\int_2^4 (3x^2 - 4x + 1) dx$

b) $\int_1^8 \frac{\sqrt{x} - x^2}{\sqrt[3]{x}} dx$

c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \frac{1}{2} x \, dx$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x} dx$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin x} dx$

f) $\int_0^1 x(2x^2-1)^{10} dx$

g) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin x \cos x \, dx$

h) $\int_1^e x^3 \ln x \, dx$

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx$

j) $\int_1^2 (3x+2) \ln x \, dx$

řešení: a) 34, b) $\frac{48}{7}\sqrt{2} - \frac{5403}{56}$, c) $\frac{\pi}{2} + 1$, d) $2 - \frac{\pi}{4}$, e) $\ln 2$, f) $\frac{1}{22}$, g) $-\frac{1}{2}$, h) $\frac{3e^4+1}{16}$, i) $\frac{\pi}{2} - 1$, j) $10 \ln 2 - \frac{17}{4}$.

3) Určete obsah plochy omezené parabolou $y = -x^2 + 6x - 5$ a přímkou $p: y = \frac{x}{2} + 2$.

řešení: $\frac{9}{16}\ j^2$.

4) Určete obsah plochy omezené parabolou $y = x^2 - 9x + 18$, přímkami $x = 2, x = 8$ a osou *x*.

řešení: $15\ j^2$.

5) Určete obsah obrazce omezeného grafy funkcí $f(x) = \frac{2}{1+x^2}, g(x) = x^2$.

řešení: $\pi - \frac{2}{3}\ j^2$.

6) Pomocí integrálního počtu odvoďte vztah pro výpočet objemu koule.

7) Pomocí integrálního počtu odvoďte vztah pro výpočet kulové výseče.

8) Určete objem nádobky, která vznikne rotací obrazce omezeného křivkou $y = \frac{5}{2} + \cos x$ a přímkami $x = 0, x = \frac{3}{4}\pi$ kolem osy *x*.

řešení: Asi 60,3 j^3.

9) Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací oblouku sinusoidy $y = \sin x$ kolem osy *x* v intervalu $\langle 0; \pi \rangle$.

řešení: $\frac{\pi^2}{2}\ j^3$.

10) Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací útvaru omezeného křivkami $y^2 + x - 4 = 0, x = 0$ kolem osy y.

řešení: $\frac{512}{15}\pi\ j^3$.

30 Lineární algebra

1) Jsou dány matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Vypočítejte matice:

   a) $D = 2B - A^T + 4I$

   b) $E = A \cdot B$

řešení: a) $D = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, b) $E = \begin{pmatrix} 12 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

2) Určete matici X tak, aby platilo $X + B \cdot A = 3 \cdot A$, jestliže $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

   $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

řešení: $X = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

3) Vypočtěte $X = (A + B)^2 - 3I$, jestliže $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

řešení: $X = \begin{pmatrix} 10 & 9 & -9 \\ 6 & 4 & -6 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

4) Určete hodnost matice:

   a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

   b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

   c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

   d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

řešení: a) $h(A) = 3$, b) $h(B) = 2$, c) $h(C) = 4$, d) $h(D) = 5$.

5) Rozhodněte, pro které číslo $a \in R$ má matice $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & a \end{pmatrix}$ hodnost $h(A) = 3$.

řešení: $a \neq \frac{9}{4}$.

6) Určete inverzní matici k matici:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

řešení: a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -1 \\ -13 & 6 & 2 \\ 4 & -2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$,
c) $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$, d) $D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

7) Vypočítejte hodnoty determinantu:

a) $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -7 & 6 & 5 \\ 8 & -9 & 10 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

f) rozvojem podle 2. řádku
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

g) rozvojem podle 3. řádku
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -7 & 6 & 0 \\ -8 & 0 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

řešení: a) 1, b) 0, c) -60, d) -1, e) -189, f) 12, g) -553.

8) Vypočítejte hodnotu determinantu (je možné jej nejprve upravit tak, aby některý řádek či sloupec obsahoval co největší počet nul):

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

řešení: a) 1, b) 54, c) 36

9) Určete inverzní matici k dané matici pomocí adjungované matice:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

řešení: a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$, b) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, c) $C^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$.

10) Z daných maticových rovnic vyjádřete matici X:

a) $A \cdot X + 2B = I$

b) $3 \cdot (X + 2A) = 4 \cdot (X - B)$

c) $2 \cdot (A - X) = X \cdot A^T + I$

d) $2XA^T - I + 2X = XB - AB$

řešení: a) $X = A^{-1} \cdot (I - 2B)$, b) $X = 6A + 4B$,
c) $X = (2A - I) \cdot (A^T + 2I)^{-1}$, d) $X = (I - AB) \cdot (2A^T + 2I - B)^{-1}$.

11) Řešte maticovou rovnici:

a) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

c) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

e) $2A - BX + 3X = 2X + B^T + 2I$, kde $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

f) $3X + 2I = A^T + AX$, kde $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

g) $AX + 2X = X + B$, kde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -5 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

h) $BX - I = X - A$, kde $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

řešení: a) $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$; b) $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$; c) $X = \begin{pmatrix} 23 & -9 \\ 5 & -2 \\ -16 & 7 \end{pmatrix}$; d) $X = \begin{pmatrix} 12 & -\frac{15}{2} \\ 4 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$;
e) $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$; f) $X = \begin{pmatrix} -10 & -11 & -8 \\ -25 & -27 & -21 \\ -22 & -23 & -19 \end{pmatrix}$; g) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;
h) $X = \begin{pmatrix} 2 & -11 & 5 \\ 1 & -15 & 7 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

12) Řešte soustavu lineárních rovnic (Gaussova eliminační metoda):

a)
$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -2x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & -x_2 & -2x_3 & -3x_4 & = & 8 \\ 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & +2x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & -3x_2 & +2x_3 & +x_4 & = & -8 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +2x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & +2x_4 & = & 3 \\ 4x_1 & +7x_2 & +x_3 & & = & 5 \\ 5x_1 & +7x_2 & -4x_3 & +7x_4 & = & 8 \end{array}$$

c) $\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +3x_2 & & = & 1 \\ & x_2 & -x_3 & = & -1 \\ -x_1 & +2x_2 & & = & 2 \end{array}$

řešení: a) $(x_1; x_2; x_3; x_4) = (1; 2; -1; -2)$;
b) $(x_1; x_2; x_3; x_4) = (5s - 7t + 3; -3s + 4t - 1; s; t), s, t \in R$, c) $(x_1; x_2; x_3) = \left(-\frac{4}{7}; \frac{5}{7}; \frac{12}{7}\right)$.

13) Řešte soustavu lineárních rovnic (Jordanova metoda úplné eliminace):

a) $\begin{array}{rrrcr} x_1 & & -2x_3 & = & -5 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 7 \\ -x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = & 9 \end{array}$

b) $\begin{array}{rrrrcr} 3x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & +3x_4 & = & 3 \\ 3x_1 & -3x_2 & & +3x_4 & = & 1 \end{array}$

řešení: a) $(x_1; x_2; x_3) = (1; 2; 3)$; b) $(x_1; x_2; x_3; x_4) = \left(6 - 5t; \frac{17}{3} - 4t; 3t - \frac{10}{3}; t\right), t \in R$.

14) Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu:

a) $\begin{array}{rrrcr} x_1 & +x_2 & +3x_3 & = & 7 \\ x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & 5 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 3 \end{array}$

b) $\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & +2x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 4 \\ 4x_1 & +3x_2 & -x_3 & +2x_4 & = & 6 \\ 8x_1 & +5x_2 & -3x_3 & +4x_4 & = & 12 \\ 3x_1 & +3x_2 & -2x_3 & +2x_4 & = & 6 \end{array}$

řešení: a) $(x_1; x_2; x_3) = (1; 0; 2)$; b) $(x_1; x_2; x_3; x_4) = (1; 1; -1; -1)$.